ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ.

Часть I.

ИНТЕГРИРОВАНІЕ ФУНКЦІЙ.

Составилъ

Г. Д. Гродскій,

Профессоръ Михайловской Артиллерійской Академіи.

ИЗДАНІЕ ТРЕТЬЕ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

Вас. Остр., 9 линія, № 12.

1912.

КЛАССНАЯ КЛАДОВАЯ
НИКОЛАЕВСКАГО
АРТИЛЛЕРІЙСК. УЧИЛИЩА
1915.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ.

Часть I.

ИНТЕГРИРОВАНІЕ ФУНКЦІЙ.

Составилъ

Г. Д. Гродекій,

Профессоръ Михайловской Артиллерійской Академіи.

ИЗДАНІЕ ТРЕТЬЕ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

Вас. Остр., 9 линія, № 12.

1912.

КЛАССНАЯ КЛАДОВАЯ
НИКОЛАЕВСКАГО
АРТИЛЛЕРІЙСК. УЧИЛИЩА
1915.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

стр.

Гл. I. Понятіе объ интегралѣ. Основные способы интегрированія.

§ 1. Понятіе объ интегралѣ 1
§ 2. Основные способы интегрированія 3

Гл. II. Интегрированіе раціональныхъ алгебрическихъ дробей.

§ 1. Разложеніе раціональныхъ алгебрическихъ дробей на частныя 9
§ 2. Интегрированіе раціональныхъ дробей 30

Гл. III. Интегрированіе ирраціональныхъ функцій.

§ 1. Ирраціональныя функціи вообще 47
§ 2. Систематическое интегрированіе раціональн. функцій x'а и радикала $R=\sqrt{ax^2+bx+c}$ 59
§ 3. Интегрированіе дифференціальныхъ биномовъ 93

Гл. IV. Интегрированіе трансцендентныхъ функцій.

§ 1. Общія указанія 104
§ 2. Функціи, содержащія знакъ логарифма 108
§ 3. Показательныя функціи 116
§ 4. Функціи тригонометрическихъ сложныхъ чиселъ 118
§ 5. Функціи круговыхъ сложныхъ чиселъ 153

Глава I.

Понятіе объ интегралѣ. Основные способы интегрированія.

§ 1. Понятіе объ интегралѣ.

1. **Опредѣленіе.** **Неопредѣленнымъ интеграломъ** *функціи* $f(x)$ *или ея* **первообразной** *наз. такая функція* $F(x)$, *производная которой есть* $f(x)$. Эту *новую* функцію обозначаютъ знàкомъ

$$\int f(x)\,dx,$$

такъ что равенство $\int f(x)\,dx = F(x)$

обозначаетъ, что $F'(x) \equiv f(x)$

и, слѣд., конечно $dF(x) \equiv f(x)\,dx.$

Функція $f(x)$ наз. **подъинтегральной**, а произведеніе $f(x)\,dx$ наз. **подъинтегральнымъ выраженіемъ**, такъ что можемъ еще сказать, что *производная интеграла равна подъинтегральной функціи*, а *дифференціалъ интеграла равенъ подъинтегральному выраженію*.

2. Такъ какъ производныя двухъ функцій, отличающихся постояннымъ слагаемымъ, одинаковы, то, очевидно, если

$$F(x) = \int f(x)\,dx,$$

то и $F(x) + C$, гдѣ C — любое постоянное число, также будетъ интеграломъ для $f(x)$; такимъ образомъ, *функція имѣетъ не одинъ интегралъ, а безчисленное множество.*

Теорема. *Различные интегралы функціи отличаются другъ отъ друга лишь постояннымъ слагаемымъ.*

Дѣйствительно, пусть

$$F(x) = \int f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \Phi(x) = \int f(x)\,dx,$$

т.-е. $$F'(x) \equiv f(x) \quad \text{и} \quad \Phi'(x) \equiv f(x);$$

тогда $$[\Phi(x) - F(x)]'_x \equiv \Phi'(x) - F'(x) \equiv f(x) - f(x) \equiv 0,$$

и, слѣд., $\Phi(x) - F(x)$ — число постоянное.

На основаніи этой теоремы, найдя одну изъ первообразныхъ для $f(x)$ — напр., $F(x)$, пишутъ, что

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

при чемъ C наз. **постоянной произвольной.**

3. Во второй части этого курса будетъ доказано, что **всякая непрерывная функція имѣетъ первообразную, т.-е. имѣетъ интегралъ;** но при этомъ послѣдній часто не можетъ быть выраженъ *конечной совокупностью простѣйшихъ аналитическихъ дѣйствій, а представляетъ нѣкоторую* **новую функцію,** *изученіе свойствъ которой* **на основаніи свойствъ ея производной** *и составляетъ одну изъ главнѣйшихъ задачъ* **интегральнаго исчисленія** *вообще;* цѣль же **неопредѣленнаго интегрированія** — *нахожденіе для* $\int f(x)\,dx$ *конечныхъ выраженій въ простѣйшихъ функціяхъ* (когда, конечно, такое выраженіе возможно).

§ 2. Основные способы интегрированія.

4. *Непосредственное интегрированіе.* Самый простой случай интегрированія—когда оно совершается *непосредственно* на основаніи формулъ дифференціальнаго исчисленія; напр.,

изъ того, что $(x^n)' = nx^{n-1}$

и, слѣд., $\left(\frac{x^n}{n}\right) = x^{n-1}$,

заключаемъ, что $\int x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n} + C$,

а слѣд., $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$;

отсюда, полагая еще $n = -m$, получаемъ:

$$\int x^{-m}\,dx = \frac{x^{-m+1}}{-m+1} + C \text{ или } \int \frac{dx}{x^m} = -\frac{1}{(m-1)\,x^{m-1}} + C.$$

Главнѣйшіе случаи непосредственнаго интегрированія собраны въ нижеслѣдующей таблицѣ (*которую необходимо помнить наизусть*):

$$\int dx = x + C.$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{при } n \neq -1.$$

$$\int \frac{dx}{x^m} = -\frac{1}{(m-1)\,x^{m-1}} + C \qquad \text{при } m \neq 1.$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,\ \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C, \text{ и т. д.}$$

$$\int \frac{dx}{x} = lx + C,\ \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{Arctg} x + C = -\operatorname{Arccotg} x + C_1.$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C,\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsin} x + C = -\operatorname{Arccos} x + C_1.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2(x^2-1)}} = \operatorname{Arcsec} x + C = -\operatorname{Arccosec} x + C_1.$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C,\quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{la} + C.$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,\quad \int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C,\quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C,\quad \int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C.$$

5. Во всѣхъ другихъ случаяхъ интегралъ ищется помощью одного изъ нижеизложенныхъ **«основныхъ методовъ интегрированія»**; при этомъ часто полезна еще слѣдующая

Теорема. *Постоянный множитель можно при интегрированіи выносить изъ-подъ знака интеграла или вносить подъ него.*

Дѣйствительно, положимъ, что α — *число постоянное*

и что $$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

такъ что $$F'(x) \equiv f(x);$$

тогда $$\alpha f(x) \equiv \alpha F'(x) = [\alpha F(x)]'_x,$$

а слѣд., $$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha F(x) + C_1 = \alpha \int f(x)\,dx + C'.$$

6. I. Интегрированіе замѣной перемѣнной.

Пусть надо найти интегралъ

$$I = \int \theta(x)\,dx,$$

при чемъ $$\theta(x) \equiv f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x);$$

положимъ тогда $$\varphi(x) = y$$

и, слѣд., $$\varphi'(x)\,dx = dy,$$

такъ что $$\theta(x)\,dx \equiv f(y)\,dy,$$

и допустимъ, что $\int f(y)\,dy = F(y) + C,$

т.-е. $F'(y) = f(y);$

тогда $I = F[\varphi(x)] + C,$

ибо $\{F[\varphi(x)]\}'_x = [F(y)]'_x = F'_y(y) \cdot y'_x = f(y) \cdot y'_x =$
$= f[\varphi(x)]\,\varphi'(x) = \theta(x).$

Прим. 1. Полагая $x + a = y$, откуда $dx = dy$, получаемъ:

$$\int \frac{dx}{(x+a)^m} = \int \frac{dy}{y^m} = -\frac{1}{(m-1)\,y^{m-1}} + C,$$

т.-е. $$\int \frac{dx}{(x+a)^m} = -\frac{1}{(m-1)(x+a)^{m-1}} + C \text{ при } m \neq 1;$$

и $$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{dy}{y} = ly + C,$$ т.-е. $$\int \frac{dx}{x+a} = l(x+a) + C.$$

Прим. 2. Полагая $2x = y$, находимъ:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = 2\int \frac{2dx}{(2 \sin x \cos x)^2} = 2\int \frac{d\,2x}{\sin^2 2x} = 2\int \frac{dy}{\sin^2 y} =$$
$$= -2 \operatorname{cotg} y + C = -2 \operatorname{cotg} 2x + C.$$

Прим. 3. Полагая $\operatorname{tg} x = y$, получаемъ:

$$\int \frac{dx}{\sin 2x} = \int \frac{dx}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{\left(\frac{dx}{\cos^2 x}\right)}{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} =$$
$$= \frac{1}{2} ly + C = \frac{1}{2} l \operatorname{tg} x + C = l\sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$$

Замѣчаніе. Примѣняя способъ замѣны перемѣнной, весьма часто можно не вводить фактически новой буквы; но при этомъ необходимо *предварительно подготовить подъинтегральную функцію* такъ, чтобы, во-первыхъ, принимая мысленно нѣкоторое сложное число за новый аргументъ, можно было примѣнить одну изъ формулъ непосредственнаго интегрированія; а во-вторыхъ, чтобы въ качествѣ дифференціальнаго множителя

подъ интегралomъ стоялъ не dx, а дифференціалъ помянутаго сложнаго числа (принимаемаго мысленно за новую перемѣнную).

Прим. 1. $\int \sin(3x-4)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x-4)\,d(3x-4) = -\frac{\cos(3x-4)}{3} + C.$

Прим. 2. $\int \frac{dx}{(5x-2)^4} = \frac{1}{5}\int \frac{d\,5x}{(5x-2)^4} = -\frac{1}{5.3\,(5x-2)^3} + C.$

Прим. 3. $\int \frac{dx}{(1.-3x)^2} = -\frac{1}{3}\int \frac{d\,(-3x)}{(1-3x)^2} = \frac{1}{3\,(1-3x)} + C.$

Прим. 4. $\int \frac{dx}{1+9x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d\,3x}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3}\operatorname{Arctg} x + C.$

Прим. 5. $\int \frac{dx}{2+7x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\frac{7}{2}x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\,x\right)^2} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{7}{2}}}\int \frac{d\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\,x\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\,x\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{Arctg}\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\,x\right) + C.$$

Прим. 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2(2x^2-3)}} = \frac{1}{\sqrt{15}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\left(\frac{2}{3}x^2-1\right)}} =$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{15}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{3}x^2.\left(\frac{2}{3}x^2-1\right)}} = \frac{1}{\sqrt{15}}\int \frac{d\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,x\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,x\right)^2\left[\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,x\right)^2-1\right]}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{Arcsec}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,x\right) + C.$$

7. II. Разложеніе на слагаемыя.

Теорема. *Интегралъ алгебрической суммы функцій равенъ такой же суммѣ ихъ интеграловъ.* Дѣйствительно,

пусть $\int f(x)\,dx = F(x) + C_1$, $\int \varphi(x)\,dx = \Phi(x) + C_2$,

$$\int \omega(x)\,dx = \Omega(x) + C_3,$$

т.-е. $F'(x) \equiv f(x),\ \Phi'(x) \equiv \varphi(x),\ \Omega'(x) \equiv \omega(x);$

тогда $f(x) - \varphi(x) + \omega(x) \equiv F'(x) - \Phi'(x) + \Omega'(x) \equiv$

$$\equiv [F(x) - \Phi(x) + \Omega(x)]'_x,$$

а слѣд., $$\int [f(x) - \varphi(x) + \omega(x)]\, dx \equiv$$

$$\equiv F(x) - \Phi(x) + \Omega(x) + C = \int f(x)\, dx - \int \varphi(x)\, dx + \int \omega(x)\, dx + C'.$$

Способъ примѣненія этой теоремы ясенъ самъ собой.

Прим. 1.

$$\int \frac{2a\, dx}{x^2 - a^2} = \int \left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right] dx = \int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} =$$

$$= l(x-a) - l(x+a) + C = l\frac{x-a}{x+a} + C.$$

Прим. 2.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} + C = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} + C = -2 \operatorname{cotg} 2x + C.$$

8. III. Интегрированіе по частямъ.

Интегрируя равенство

$$d(pq) = p\, dq + q\, dp$$

и считая постоянную произвольную скрытой въ знакѣ одного изъ интеграловъ, получаемъ:

$$pq = \int (p\, dq + q\, dp) = \int p\, dq + \int q\, dp,$$

откуда $$\int p\, dq = pq - \int q\, dp \ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

это равенство носитъ названіе **формулы интегрированія по частямъ** и примѣняется тогда, когда подъинтегральная функція представляетъ произведеніе. Именно, пусть ищется интегралъ

$$I = \int f(x)\, \varphi(x)\, dx;$$

положимъ $f(x) = p$ и $\varphi(x)\,dx = dq$,

откуда $q = \int \varphi(x)\,dx = \Phi(x)$;

тогда, примѣняя (1), получаемъ:

$$I = pq - \int q\,dp = f(x)\,\Phi(x) - \int \Phi(x).f'(x)\,dx,$$

и если q мы умѣемъ найти, а функція $\Phi(x)\,f'(x)$ проще, чѣмъ $f'(x)\,\varphi(x)$, то задача сведена на болѣе простую. Такъ какъ для нахожденія q надо проинтегрировать лишь *часть* подъинтегральной функціи (именно, одинъ изъ ея множителей), то поэтому методъ и носитъ названіе «интегрированія по частямъ»; дѣйствіе же отысканія q наз. «*подведеніемъ* множителя $\varphi(x)$ *подъ знакъ дифференціала*», ибо произведеніе $\varphi(x)\,dx$ замѣняется на dq.

Прим. 1.

$$\int \underbrace{x}_{p} \underbrace{\sin x\,dx}_{dq} = \int \underbrace{x}_{p}\,d\underbrace{(-\cos x)}_{q} = x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Прим. 2.

$$\int x lx\,dx = \int \underbrace{lx}_{p}\,\underbrace{x\,dx}_{dq} = \int \underbrace{lx}_{p}\,d\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{q} = \frac{x^2}{2}lx - \int \frac{x^2}{2}\,dlx =$$

$$= \frac{x^2 lx}{2} - \frac{1}{2}\int x^2\,\frac{dx}{x} = \frac{x^2 lx}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2 lx}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

Прим. 3.

$$\int e^x \sin x\,dx = \int e^x\,d(-\cos x) = -e^x\cos x + \int \cos x\,e^x\,dx =$$

$$= -e^x\cos x + \int e^x \cos x\,dx = -e^x\cos x + \int e^x\,d\sin x =$$

$$= -e^x\cos x + e^x\sin x - \int \sin e^x\,dx;$$

перенося послѣдній интегралъ въ лѣвую часть, дѣлая приведеніе и прибавляя постоянную произвольную C, получаемъ:

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{\sin x - \cos x}{2}\,e^x + C.$$

Глава II.

Интегрированіе раціональныхъ алгебрическихъ дробей.

§ 1. Разложеніе раціональныхъ алгебрическихъ дробей на частныя.

9. Опредѣленіе. *Алгебрическая дробь* $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *наз.* **раціональной,** *если ея числитель и знаменатель представляютъ цѣлые алгебрическіе многочлены;* разсматривая дальше такія дроби, мы всегда будемъ предполагать ихъ *несократимыми.*

Если степень числителя меньше степени знаменателя, то дробь наз. **правильной,** въ противномъ случаѣ — **неправильной.** Когда дробь — неправильная, то, дѣля числитель на знаменатель и получивъ при этомъ въ остаткѣ многочленъ $\theta(x)$, а въ частномъ — многочленъ $f(x)$ (показатель степени коего, очевидно, равенъ разности между показателями степени числителя и знаменателя), имѣемъ, какъ извѣстно, что

$$\varphi(x) \equiv f(x)\psi(x) + \theta(x),$$

откуда

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = f(x) + \frac{\theta(x)}{\psi(x)},$$

при чемъ степень $\theta(x)$ меньше степени $\psi(x)$; такимъ образомъ, *изъ всякой неправильной дроби можно «выдѣлить* (дѣленіемъ) *цѣлую часть», при чемъ добавочная къ ней дробь будетъ уже правильною* и, очевидно, несократимой, какъ и данная.

10. Какъ мы видѣли выше, можемъ сразу написать, чему равны

$$\int x^m dx \text{ и } \int \frac{dx}{(x-\alpha)^m};$$

поэтому, съ цѣлью нахожденія $\int f(x)\,dx$, въ которомъ $f(x)$ — раціональная дробь, покажемъ, что такую дробь всегда можно представить подъ видомъ суммы слагаемыхъ вида $a_i x^i$ и $\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$; и такъ какъ совокупность членовъ вида $a_i x^i$ образуетъ, очевидно, въ разсматриваемой дроби ея *цѣлую часть*, которую мы уже имѣемъ выдѣлять, то разсмотримъ лишь разложеніе *правильной* дроби на слагаемыя вида $\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$ или, какъ говорятъ, **разложеніе** *правильной алгебрической дроби* **на частныя или простѣйшія дроби.**

11. Допуская, что разложеніе возможно, мы прежде всего заключаемъ, что *знаменатель любой частной дроби долженъ быть дѣлителемъ знаменателя разлагаемой дроби*, такъ какъ послѣдняя получается отъ сложенія всѣхъ частныхъ дробей, а оно, какъ извѣстно, даетъ въ результатѣ дробь, знаменатель которой есть наименьшее кратное знаменателей слагаемыхъ дробей. Такимъ образомъ, прежде всего мы встрѣчаемся съ вопросомъ о разложеніи цѣлаго многочлена $\psi(x)$ на множители. Этотъ вопросъ рѣшается въ **Высшей Алгебрѣ**, именно, въ **Теоріи ур-ній**, гдѣ доказывается, что всякій цѣлый многочленъ ν-ой степени, напр., $\psi(x)$, можетъ быть представленъ въ видѣ произведенія:

$$\psi(x) \equiv A(x-\alpha)^m (x-\beta)^n \ldots (x-\lambda)^s \ldots\ldots (2),$$

при чемъ, конечно, $m+n+\ldots s=\nu$,

а A—число постоянное и представляетъ, очевидно, коэффиціентъ при x^ν въ многочленѣ $\psi(x)$.

Равенство (2) показываетъ, что $\psi(x)$ обращается въ нуль при $x=\alpha$, при $x=\beta,\ldots$, при $x=\lambda$, и **только при этихъ значеніяхъ**, такъ что $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ **суть корни ур-нія** $\psi(x)=0$; при этомъ α наз. m'кратнымъ корнемъ, β — n'кратнымъ, и т. д.

Такимъ образомъ, для разложенія знаменателя дроби $\frac{\theta(x)}{\psi(x)}$ на множители, надо рѣшить ур-ніе $\psi(x)=0$; такъ какъ эта послѣдняя задача составляетъ предметъ Высшей Алгебры, то мы дальше будемъ вообще предполагать, что знаменатель $\varphi(x)$ заданъ уже разложеннымъ на множители.

12. **Лемма — теорема Безу.** *Остатокъ R отъ дѣленія цѣлаго многочлена $f(x)$ на $x-\alpha$ равенъ значенію этого многочлена при $x=\alpha$.*

Дѣйствительно, обозначая частное черезъ Q, имѣемъ

$$f(x)\equiv Q(x-\alpha)+R;$$

такъ какъ дѣлитель $x-\alpha$ — первой степени, то R — нулевой, т.-е. представляетъ число постоянное и, слѣд., не мѣняется при измѣненіи x; полагая поэтому $x=\alpha$ въ предыдущемъ равенствѣ, мы и получимъ: $R=f(\alpha)$.

Слѣдствіе. *Чтобы цѣлый многочленъ дѣлился на $x-\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы α было его корнемъ.*

13. **Теорема.** *Если* $\frac{\theta(x)}{(x-\alpha)^m\psi_1(x)}$ — **несократимая** *раціональная дробь, при чемъ* $\psi_1(x)$ **уже не содержитъ множителя** $x-\alpha$ (**а слѣд.,** $\psi(\alpha)\neq 0$), *то можно изъ этой дроби выдѣлить* **частную или простѣйшую** *дробь* $\frac{A}{(x-\alpha)^m}$ *съ такимъ числителемъ A, что добавочная дробь будетъ имѣть знаменателемъ лишь $(x-\alpha)^{m-1}\psi_1(x)$.*

Дѣйствительно, считая пока A — произвольнымъ, имѣемъ:

$$\frac{\theta(x)}{(x-\alpha)^m\psi_1(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)^m}+\frac{\theta(x)}{(x-\alpha)^m\psi_1(x)}-\frac{A}{(x-\alpha)^m}\equiv\frac{A}{(x-\alpha)^m}+\frac{\theta(x)-A\psi_1(x)}{(x-\alpha)^m\psi_1(x)};$$

чтобы послѣдняя дробь приводилась къ дроби съ знаменателемъ $(x-\alpha)^{m-1}\psi_1(x)$, надо, чтобы она сократилась на $x-\alpha$, т.-е. чтобы ея числитель $\theta(x)-A\psi_1(x)$ дѣлился на $x-\alpha$; а по теоремѣ Безу для этого необходимо и достаточно, чтобы A удо-

влетворяло ур-нію

$$[\theta(x) - A\psi_1(x)]_{x=\alpha} = 0 \text{ или } \theta(\alpha) - A\psi(\alpha) = 0,$$

откуда $$A = \frac{\theta(\alpha)}{\psi(\alpha)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3);$$

это значеніе для A не равно нулю, ибо, по условію, данная дробь несократима и, слѣд., $\theta(\alpha) \neq 0$; въ то же время *оно* **вполнѣ опредѣленно** и не равно ∞, *ибо по условію* $\psi_1(\alpha) \neq 0$; слѣд., теорема доказана.

Подставляя значеніе (3) числа A въ числитель $\theta(x) - A\psi_1(x)$ добавочной дроби, производя сокращеніе и обозначая новый числитель черезъ $\theta_1(x)$, получаемъ:

$$\frac{\theta(x)}{(x-\alpha)^m \psi_1(x)} \equiv \frac{A}{(x-\alpha)^m} + \frac{\theta_1(x)}{(x-\alpha)^{m-1} \psi_1(x)}.$$

14. Слѣдствіе 1. Примѣняя предыдущую теорему къ дроби $\frac{\theta_1(x)}{(x-\alpha)^{m-1}\psi_1(x)}$, получимъ, что

$$\frac{\theta_1(x)}{(x-\alpha)^{m-1}\psi_1(x)} \equiv \frac{A_1}{(x-\alpha)^{m-1}} + \frac{\theta_2(x)}{(x-\alpha)^{m-2}\psi_1(x)},$$

и слѣд.,

$$\frac{\theta(x)}{(x-\alpha)^m \psi_1(x)} \equiv \frac{A}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{m-1}} + \frac{\theta_2(x)}{(x-\alpha)^{m-2}\psi_1(x)};$$

а продолжая такъ разсуждать и далѣе, найдемъ, наконецъ, что

$$\frac{\theta(x)}{(x-\alpha)^m \psi_1(x)} \equiv \frac{A}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-2}}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_{m-1}}{x-\alpha} + \frac{\omega(x)}{\psi_1(x)};$$

при чемъ *нѣкоторые изъ коэффиціентовъ* $A_1, A_2, \ldots A_{m-1}$ *могутъ, конечно, обращаться въ нуль,* ибо нѣкоторые изъ послѣдовательныхъ числителей $\theta_1(x)$, $\theta_2(x), \ldots$ могутъ дѣлиться на первую или высшую степень двучлена $x - a$.

15. Слѣдствіе 2. Полагая

$$\psi_1(x) \equiv (x-\beta)^n \psi_2(x),$$

гдѣ $\psi_2(x)$ уже не содержитъ множителя $(x-\beta)$, подобно предыдущему найдемъ, что

$$\frac{\omega(x)}{(x-\beta)^n\,\psi_2(x)} \equiv \frac{B}{(x-\beta)^n} + \frac{B_1}{(x-\beta)^{n-1}} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{x-\beta} + \frac{\Omega(x)}{\psi_2(x)},$$

а слѣд.,

$$\frac{\theta(x)}{(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,\psi_2(x)} \equiv \frac{A}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-\alpha} + \\ + \frac{B}{(x-\alpha)^n} + \frac{B_1}{(x-\alpha)^{n-1}} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{x-\beta} + \frac{\Omega(x)}{\psi_2(x)};$$

продолжая же подобныя дѣйствія дальше и предполагая разлагаемую дробь **правильной**, получимъ окончательно, что

$$\frac{\theta(x)}{(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\ldots(x-\lambda)^s} \equiv \frac{A}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-\alpha} + \\ + \frac{B}{(x-\beta)^n} + \frac{B_1}{(x-\beta)^{n-1}} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{x-\beta} + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + \frac{L}{(x-\lambda)^s} + \frac{L_1}{(x-\lambda)^{s-1}} + \ldots + \frac{L_{s-1}}{x-\lambda}.$$

При этомъ, какъ ясно изъ самаго хода разсужденій, подобное разложеніе — **единственно**, т.-е. *величины числителей частныхъ дробей не зависятъ отъ способа ихъ опредѣленія.*

16. Если дана была **неправильная** дробь $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, то къ полученному выше разложенію надо еще прибавить цѣлую часть $f_k(x)$; при этомъ числители частныхъ дробей можно опредѣлять, и не выдѣляя цѣлой части; въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ, напр.,

$$\varphi(x) \equiv f_k(x)\,\psi(x) + \theta(x) = f_k(x)(x-\alpha)^m\,\psi_1(x) + \theta(x),$$

то
$$\varphi(\alpha) = \theta(\alpha),$$

а слѣд.,
$$A = \frac{\theta(\alpha)}{\psi(\alpha)} = \frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)}.$$

Мы дальше будемъ всегда предполагать цѣлую часть уже

выдѣленною, ибо это, какъ было указано, достигается простымъ дѣленіемъ.

17. **Слѣдствіе 3.** Если мы положимъ

$$\psi(x) \equiv \psi_1(x)\,\psi_2(x),$$

гдѣ $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ — цѣлые многочлены, *не имѣющіе общихъ множителей*, то, соединяя въ найденномъ выше разложеніи члены, знаменатели коихъ суть дѣлители многочлена $\psi_1(x)$, въ одинъ, а всѣ остальные — въ другой, и обозначая ихъ числители черезъ $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$, заключаемъ что,

если $\psi_1(x)$ *и* $\psi_2(x)$ *суть взаимнопростые цѣлые многочлены, то всегда можно найти два такихъ другихъ цѣлыхъ многочлена* $\omega_1(x)$ *и* $\omega_2(x)$, *что*

$$\frac{\theta(x)}{\psi_1(x)\,\psi_2(x)} \equiv \frac{\omega_1(x)}{\psi_1(x)} + \frac{\omega_2(x)}{\psi_2(x)},$$

при чемъ такое разложеніе тоже **единственно.**

Опредѣленіе числителей частныхъ дробей.

18. Самый общій пріемъ нахожденія этихъ числителей есть **способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ**; для его примѣненія мы пишемъ разложеніе съ буквенными числителями, затѣмъ умножаемъ его на знаменатель $\psi(x)$ данной дроби и, сдѣлавъ приведеніе въ полученномъ такимъ образомъ равенствѣ:

$$\begin{aligned}
\theta(x) \equiv {} & A\psi_1(x) + A_1(x-\alpha)\psi_1(x) + A_2(x-\alpha)^2\psi_1(x) + \ldots \\
& + A_{m-1}(x-\alpha)^{m-1}\psi_1(x) + \\
& + B(x-\alpha)^m\psi_2(x) + B_1(x-\alpha)^m(x-\beta)\psi_2(x) + \ldots \\
& + B_{n-1}(x-\alpha)^m(x-\beta)^{n-1}\psi_2(x) + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + L(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\ldots(x-\lambda)^0 + \\
& + L_1(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\ldots(x-\lambda) + \ldots \\
& + L_{s-1}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\ldots(x-\lambda)^{s-1},
\end{aligned}$$

приравниваемъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x'а въ лѣвой и правой частяхъ равенства. Такъ какъ число неизвѣстныхъ равно, очевидно,

$$m + n + \ldots + s = \nu,$$

показатель-же степени послѣднихъ членовъ каждой строчки правой части, а, значитъ, и всей этой части равенъ $\nu - 1$, такъ что число членовъ въ ней равно ν, то, значитъ, число неизвѣстныхъ равно числу получаемыхъ такимъ образомъ условныхъ *линейныхъ* ур-ній. При этомъ, зная ужѣ, что разложеніе возможно всегда и притомъ единственнымъ образомъ, можемъ à priori быть увѣренными, что эти ν ур-ній будутъ совмѣстны и различны.

Прим. 1. Для разложенія дроби

$$f(x) \equiv \frac{2x^5 + x^4 - 3x^2 + 2x - 1}{(x-1)^3}$$

дѣлимъ числитель на знаменатель $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$:

$$\begin{array}{rl|l} 2x^5 + x^4 - 3x^2 + 2x - 1 & & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ \hline -2x^5 + 6x^4 - 6x^3 + 2x^2 & & 2x^2 + 7x + 15 \\ \hline 7x^4 - 6x^3 - x^2 + 2x - 1 & & \\ -7x^4 + 21x^3 - 21x^2 + 7x & & \\ \hline 15x^3 - 22x^2 + 9x - 1 & & \\ -15x^3 + 45x^2 - 45x + 15 & & \\ \hline 23x^2 - 36x + 14 & & \end{array}$$

Слѣд., $$f(x) \equiv 2x^2 + 7x + 15 + \frac{23x^2 - 36x + 14}{(x-1)^3}.$$

Затѣмъ полагаемъ

$$\frac{23x^2 - 36x + 14}{(x-1)^3} \equiv \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1}$$

и умножаемъ на $(x-1)^3$, что даетъ:

$$23x^2 - 36x + 14 \equiv A + A_1(x-1) + A_2(x-1)^2 = A_2 x^2 + (A_1 - 2A_2)x + A - A_1 + A_2,$$

откуда $$A_2 = 23, \quad A_1 - 2A_2 = -36, \quad A - A_1 + A_2 = 14$$

и, слѣд., $$A_2 = 23, \quad A_1 = 10, \quad A = 1,$$

такъ что $$f(x) \equiv 2x^2 + 7x + 15 + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{10}{(x-1)^2} + \frac{23}{x-1}.$$

Прим. 2. $$f(x)\equiv\frac{x^6-3x^4+2x^3-3x+5}{(x-1)^3(x+2)^2};$$

$$(x-1)^3(x+2)^2\equiv(x^3-3x^2+3x-1)(x^2+4x+4)\equiv x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4$$

$$\begin{array}{l|l} x^6-3x^4+2x^3-3x+5 & x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4 \\ -x^6-x^5+5x^4+x^3-8x^3+4x & \hline x-1 \\ \hline -x^5+2x^4+3x^3-8x^2+x+5 & \\ +x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4 & \\ \hline 3x^4-2x^3-9x^2+9x+1 & \end{array}$$

$$f(x)\equiv x-1+\frac{3x^4-2x^3-9x^2+9x+1}{(x-1)^3(x-2)^2};$$

$$\frac{3x^4-2x^3-9x^2+9x+1}{(x-1)^3(x+2)^2}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{B_1}{x-2};$$

$$3x^4-2x^3-9x^2+9x+1=A(x+2)^2+A_1(x-1)(x+2)^2+A_2(x-1)^2(x+2)^2+$$

$$+B(x-1)^3+B_1(x-1)^3(x+2)=(A_2x^2+A_1x-2A_2x+A-A_1+A_2)(x^2+4x+4)+$$

$$+(B_1x+B+2B_1)(x^3-3x^2+3x-1)=$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} = A_2 & x^4+4A_2 & x^3+4A_2 & x^2+4A_1 & x+4A \\ +B_1 & +A_1 & +4A_1 & -8A_2 & -4A_1 \\ & -2A_2 & -8A_2 & +4A & +4A_2 \\ & -3B_1 & +A & -4A_1 & -B \\ & +B & -A_1 & +4A_2 & -2B_1 \\ & +2B_1 & +A_2 & -B_1 & \\ & & +3B_1 & +3B & \\ & & -3B & +6B_1 & \\ & & -6B_1 & & \end{array}$$

Слѣд.,

$$A_2+B_1=3,\ 2A_2+A_1-B_1+B=-2,\ -3A_2+3A_1+A-3B_1-3B=-9,$$

$$-4A_2+4A+5B_1+3B=9,\ 4A_2-4A_1+4A-2B_1-B=1,$$

откуда $$A=\frac{6}{27},\ A_1=-\frac{13}{27},\ A_2=\frac{17}{27},\ B=-\frac{11}{27},\ B_1=\frac{64}{27},$$

такъ что

$$f(x)\equiv x-1+\frac{2}{9(x-1)^3}-\frac{13}{27(x-1)^2}+\frac{17}{27(x-1)}-\frac{11}{27(x+2)^2}+\frac{64}{27(x+2)}.$$

19. **Способъ дѣленія.** Онъ даетъ средство опредѣлить числители частныхъ дробей, отвѣчающихъ какому-либо *одному* множителю знаменателя — напр., $(x-\alpha)^m$, независимо отъ остальныхъ, и основанъ на слѣдующихъ соображеніяхъ.

Пусть имѣемъ дробь $\frac{\theta(x)}{(x-\alpha)^m \psi_1(x)}$, въ которой $\psi_1(x)$ уже не содержитъ множителя $x-\alpha$; условимся этотъ множитель $\psi_1(x)$ для сокращенія рѣчи называть, по отношенію къ $(x-\alpha)^m$, «*остальной частью знаменателя*», и положимъ

$$\frac{\theta(x)}{(x-\alpha)^m \psi_1(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-\alpha} + \frac{\omega(x)}{\psi_1(x)};$$

полагая здѣсь $x-\alpha=z$ и, слѣд., $x=\alpha+z$, получаемъ

$$\frac{\theta(\alpha+z)}{z^m \psi_1(\alpha+z)} = \frac{A}{z^m} + \frac{A_1}{z^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{z} + \frac{\omega(\alpha+z)}{\psi_1(\alpha+z)},$$

умноженіе же на z^m даетъ

$$\frac{\theta(\alpha+z)}{\psi_1(\alpha+z)} = A + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_{m-1} z^{m-1} + \frac{z^m \omega(\alpha+z)}{\psi_1(\alpha+z)}.$$

Это равенство показываетъ, что многочленъ

$$A + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_{m-1} z^{m-1}$$

есть частное отъ дѣленія $\theta(\alpha+z)$ на $\psi_1(\alpha+z)$ при условіи, что дѣлимое и дѣлитель расположены по возрастающимъ степенямъ z'а и что дѣленіе доводится до полученія остатка, содержащаго z^m общимъ множителемъ. Такимъ образомъ, получаемъ слѣдующее **правило**: *для нахожденія «по способу дѣленія» числителей частныхъ дробей, отвѣчающихъ множителю $(x-\alpha)^m$ знаменателя разлагаемой дроби*, надо *положить $x-\alpha=z$, подставить отсюда значеніе x'а (т.-е. $\alpha+z$) въ числитель разлагаемой дроби и въ «остальную часть» ея знаменателя и, развернувъ ихъ по* **возрастающимъ** *степенямъ z'а, произвести дѣленіе, доводя его до полученія въ остаткѣ лишь членовъ m-ой и высшихъ степеней;* **коэффиціенты частнаго и будутъ послѣдовательными искомыми числителями.** При этомъ, такъ какъ члены, содержащіе z въ m-ой и въ высшихъ степеняхъ, не вліяютъ, очевидно, на коэффи-

ціенты A, $A_1, \ldots . A_{m-1}$ помянутаго частнаго, то, *какъ при разворачиваніи* $\theta(\alpha + z)$ *и* $\psi_1(\alpha + z)$, *такъ и при совершеніи самаго дѣленія можно такіе члены отбрасывать.*

Прим. Разложить дробь $f(x) \equiv \frac{3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 9x + 1}{(x-1)^3 (x+2)^2}$ на частныя.

Полагая $x - 1 = z$ или $x = 1 + z$, имѣемъ

$$\theta(x) = 1 + 9(1+z) - 9(1+z)^2 - 2(1+z)^3 + 3(1+z)^4 = 1 + 9 + 9z - 9 - 18z +$$

$$- 9z^2 - 2 - 6z - 6z^2 - \ldots . + 3 + 12z + 18z^2 + \ldots . = 2 - 3z + 3z^2 + \ldots ;$$

$$(x+2)^2 = (1 + z + 2)^2 = (3+z)^2 = 9 + 6z + z^2;$$

$$\begin{array}{r|l} 2 - 3z + 3z^2 + \ldots . & 9 + 6z + z^2 \\ \hline -2 - \frac{4}{3}z - \frac{2}{9}z^2 & \frac{2}{9} - \frac{13}{27}z + \frac{17}{27}z^2 \\ \hline -\frac{13}{3}z + \frac{25}{9}z^2 + \ldots . & \\ \frac{13}{3}z + \frac{26}{9}z^2 + \ldots . & \\ \hline \frac{17}{3}z^2 + \ldots . & \\ -\frac{17}{3}z^2 - \ldots . & \end{array}$$

Слѣд., $$A = \frac{2}{9}, \quad A_1 = -\frac{13}{27}, \quad A_2 = \frac{17}{27}.$$

Полагая далѣе $x + 2 = z$, т.-е. $x = -2 + z$, получаемъ

$$\theta(x) = 1 + 9(-2+z) - 9(-2+z)^2 - 2(-2+z)^3 + 3(-2+z)^4 =$$

$$= 1 - 18 + 9z - 36 + 36z + \ldots . + 16 - 24z + \ldots . + 48 - 96z + \ldots .$$

$$= 11 - 75z + \ldots . ;$$

$$(x-1)^3 = (-2 + z - 1)^3 = (-3+z)^3 = -27 + 27z + \ldots . ;$$

$$\begin{array}{r|l} 11 - 75z + \ldots . & -27 + 27z + \ldots . \\ \hline -11 + 11z & -\frac{11}{27} + \frac{64}{27}z \\ \hline -64z + \ldots . & \\ + 64z - \ldots . , & \end{array}$$

такъ что $$B = -\frac{11}{27}, \quad B_1 = \frac{64}{27}.$$

Значитъ

$$\frac{3x^4-2x^3-9x^2+9x+1}{(x-1)^3(x+2)^2}\equiv\frac{2}{9(x-1)^3}-\frac{13}{27(x-1)^2}+\frac{17}{27(x-1)}+$$
$$-\frac{11}{27(x+2)^2}+\frac{64}{27(x+2)},$$

что согласно съ результатомъ примѣра 2-го въ № 18.

20. Въ частныхъ случаяхъ нахожденіе числителей всѣхъ или нѣкоторыхъ простѣйшихъ дробей можетъ быть упрощено.

I. Предположимъ, что α — корень m'ой кратности многочлена $\psi(x)$, такъ что $\psi(x)\equiv(x-\alpha)^m\psi_1(x)$, гдѣ уже $\psi_1(\alpha)\neq 0$.

Тогда $$\psi_1(x)\equiv\frac{\psi(x)}{(x-\alpha)^m}$$

и, слѣд., по правилу Лопиталя:

$$\psi_1(\alpha)=\left[\frac{\psi'(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}}\right]_{x=\alpha}=\left[\frac{\psi''(x)}{m(m-1)(x-\alpha)^{m-2}}\right]_{x=\alpha}=\ldots$$
$$=\left[\frac{\psi^{(m)}(x)}{m(m-1)(m-2)\ldots3.2.1}\right]_{x=\alpha}=\frac{\psi^{(m)}(\alpha)}{m!},$$

а потому $$\underline{A=m!\frac{\theta(\alpha)}{\psi^{(m)}(\alpha)}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4);$$

точно такъ же $$\underline{B=n!\frac{\theta(\beta)}{\psi^{(n)}(\beta)}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5);$$

и т. д.

Въ частномъ случаѣ, *когда корень α — одиночный*, получаемъ просто

$$\underline{A=\frac{\theta(\alpha)}{\psi'(\alpha)}};$$

а *если всѣ корни — одиночные*, то имѣемъ

$$\frac{\theta(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda)}=\frac{\theta(\alpha)}{\psi'(\alpha)(x-\alpha)}+\frac{\theta(\beta)}{\psi'(\beta)(x-\beta)}+\ldots+\frac{\theta(\lambda)}{\psi'(\lambda)(x-\lambda)}.$$

Формулы (4), (5) и т. п. для опредѣленія *старшихъ* числителей $A, B, \ldots$ разложенія выгодно примѣнять, конечно, лишь

тогда, когда знаменатель разлагаемой дроби заданъ подъ видомъ многочлена; если же онъ заданъ подъ видомъ произведенія

$$(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\ldots.(x-\lambda)^s,$$

то удобнѣе способъ дѣленія.

21. II. *Если знаменатель представляетъ лишь степень* одного *множителя*, напр., равенъ $(x-\alpha)^m$, то, полагая $x-\alpha=z$ и, слѣд., $x=\alpha+z$, имѣемъ

$$\frac{\theta(x)}{(x-\alpha)^m}=\frac{\theta(\alpha+z)}{z^m}\equiv\frac{A}{z^m}+\frac{A_1}{z^{m-1}}+\ldots.+\frac{A_{m-1}}{z},$$

откуда $\theta(\alpha+z)\equiv A+A_1z+A_2z^2+\ldots.+A_{m-1}z^{m-1}$;

такимъ образомъ *въ этомъ случаѣ числители частныхъ дробей суть коэффиціенты въ разложеніи числителя данной дроби по возрастающимъ степенямъ* z или $x-\alpha$.

Прим. $$f(x)\equiv\frac{23x^2-36x+14}{(x-1)^3}.$$

Полагая $x-1=z$ и, слѣд., $x=1+z$, имѣемъ

$$23x^2-36x+14\equiv14-36(1+z)+23(1+z)^2=14-36-36z+23+46z+23z^2=$$
$$=1+10z+23z^2;$$

слѣд., $$f(x)\equiv\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{10}{(x-1)^2}+\frac{23}{x-1},$$

что согласно съ примѣромъ 1-мъ въ № 18-мъ.

22. III. Если нѣкоторыя изъ ур-ній, получаемыхъ при примѣненіи способа неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, черезчуръ сложны, то одно изъ нихъ можно замѣнить ур-ніемъ, выводимымъ такъ: помножимъ равенство

$$\frac{\theta(x)}{\psi(x)}\equiv\frac{A}{(x-\alpha)^m}+\ldots.+\frac{A_{m-1}}{x-\alpha}+\frac{B}{(x-\beta)^n}+\ldots.+\frac{B_{n-1}}{x-\beta}+\ldots.$$
$$+\frac{L}{(x-\lambda)^s}+\ldots.+\frac{L_{s-1}}{x-\lambda}$$

на x и станемъ увеличивать x до ∞; тогда получимъ:

$$\text{Пред.}\left\{\frac{x\,\theta(x)}{\psi(x)}\right\}_{x=\infty} = A_{m-1} + B_{n-1} + \ldots + L_{s-1};$$

при этомъ, *если степень* $\theta(x)$ *лишь на единицу меньше степени* $\psi(x)$, *то Пред.* $\left\{\frac{x\,\theta(x)}{\psi(x)}\right\}$ *равенъ отношенію коэффиціентовъ старшихъ членовъ въ* $\theta(x)$ *и* $\psi(x)$, *въ противномъ же случаѣ этотъ предѣлъ* $= 0$; въ самомъ дѣлѣ,

$$\text{Пред.}\left\{\frac{Px^p + P_1 x^{p-1} + \ldots}{Qx^q + Q_1 x^{q-1} + \ldots}\right\}_{x=\infty} = \text{Пред.}\left\{\frac{x^p\left[P + \frac{P_1}{x} + \ldots\right]}{x^q\left[Q + \frac{Q_1}{x} + \ldots\right]}\right\}_{x=\infty} =$$

$$= \text{Пред.}\left\{\frac{P + \frac{P_1}{x} + \ldots}{x^{q-p}\left(Q + \frac{Q_1}{x} + \ldots\right)}\right\}_{x=\infty},$$

а это равно нулю при $q > p$, и равно $\frac{P}{Q}$ при $q = p$.

Можно также получать ур-нія, связывающія искомые числители простѣйшихъ дробей, *давая* въ тожествѣ, выражающемъ разложеніе, *числу* x *то или другое частное значеніе (которое*, конечно, *не должно равняться ни одному изъ корней знаменателя).*

Прим. Разложить на частныя дроби дробь

$$f(x) \equiv \frac{5x^5 + 4x^4 - 7x^3 + 2x^2 + x - 3}{x^6 - 3x^5 + 6x^3 - 3x^2 - 3x + 2}.$$

Знаменатель ея равенъ $(x-1)^3(x+1)^2(x-2)$;

поэтому

$$f(x) \equiv \frac{5x^5 + 4x^4 - 7x^3 + 2x^2 + x - 3}{6^6 - 3x^5 + 6x^3 - 3x^2 - 3x + 2} \equiv$$

$$\equiv \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

При этомъ

$$A = \left\{\frac{\theta(x)}{(x+1)^2(x-2)}\right\}_{x=1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}; \quad B = \left\{\frac{\theta(x)}{(x-1)^3(x-2)}\right\}_{x=-1} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6};$$

$$C = \left\{\frac{\theta(x)}{(x-1)^3(x+1)^2}\right\}_{x=2} = \frac{175}{9}.$$

Затѣмъ, умножая написанное разложеніе на x и увеличивая x до ∞, получаемъ

$$5 = A_2 + B_1 + C;$$

полагая въ этомъ же разложеніи $x=0$, имѣемъ

$$-\frac{3}{2}=-A+A_1-A_2+B+B_1-\frac{C}{2},$$

а полагая $x=-2$, получаемъ:

$$-\frac{37}{108}=-\frac{A}{27}+\frac{A_1}{9}-\frac{A_2}{3}+B-B_1-\frac{C}{4};$$

значитъ

$$A_2+B_1=5-C=-\frac{130}{9},\quad A_1-A_2+B_1=-\frac{3}{2}+A-B+\frac{C}{2}=\frac{68}{9}$$

и

$$\frac{A_1}{9}-\frac{A_2}{3}-B_1=-\frac{37}{108}+\frac{A}{27}-B+\frac{C}{4}=\frac{468}{108}=\frac{13}{3}$$

или $9A_2+9B_1=-130$, $9A_1-9A_2+9B_1=68$, $A_1-3A_2-9B_1=39$;

отсюда

$$A_1=-\frac{25}{4},\quad A_2=-\frac{113}{8},\quad B_1=-\frac{23}{72};$$

а слѣд.,

$$f(x)\equiv-\frac{1}{2(x-1)^3}-\frac{25}{4(x-1)^2}-\frac{113}{8(x-1)}+\frac{1}{6(x+1)^2}+$$
$$-\frac{23}{72(x+1)}+\frac{175}{9(x-2)}.$$

Случай мнимыхъ корней.

23. До сихъ поръ мы не дѣлали никакого различія между вещественными и мнимыми корнями знаменателя $\psi(x)$ разлагаемой дроби. Положимъ теперь, что **всѣ коэффиціенты числителя и знаменателя дроби — вещественны**, *но въ числѣ корней знаменателя есть мнимые*, и покажемъ, какъ надо измѣнить видъ разложенія дроби на частныя, **чтобы не вводить мнимости.** При этомъ предварительно вспомнимъ слѣдующую теорему высшей Алгебры:

Если цѣлый алгебрическій многочленъ $\psi(x)$ съ **вещественными** *коэффиціентами имѣетъ мнимый k-кратный корень $p+qi$, то имѣетъ и сопряженный съ послѣднимъ корень $p-qi$, при томъ* **той же кратности.**

Слѣдствіе. *Если* **вещественный** *многочленъ $\psi(x)$ имѣетъ мнимый k-кратный корень $p+qi$,* то полагая

$$N=x^2-2px+p^2+q^2,$$

имѣемъ, что $$\psi(x) \equiv N^k \psi_1(x),$$

гдѣ $\psi_1(x)$ — *тоже цѣлый* **вещественный** *многочленъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ

$$[x-(p+qi)][x-(p-qi)] = [(x-p)-qi][(x-p)+qi] =$$
$$= (x-p)^2 + q^2 = N,$$

то $$\psi(x) \equiv [x-(p+qi)]^k [x-(p-qi)]^k \psi_1(x) =$$
$$= \{[x-(p+qi)][x-(p-qi)]\}^k \psi_1(x) = N^k \psi_1(x),$$

гдѣ $\psi_1(x)$ — нѣкоторый цѣлый многочленъ; и такъ какъ онъ есть частное отъ дѣленія двухъ *вещественыхъ* многочленовъ $\psi(x)$ и N^k, то онъ самъ вещественъ.

24. **Теорема.** *Изъ всякой* **вещественной несократимой** *раціональной дроби* $\frac{\theta(x)}{N^k \psi_1(x)}$, *гдѣ* $N = x^2 - 2px + p^2 + q^2$, *а* $\psi_1(x)$ *ужѣ не содержитъ множителя* N, *можно всегда выдѣлить такую* **вещественную** *частную дробь* $\frac{Ax+B}{N^k}$, *съ* **линейнымъ** *числителемъ, что добавочная дробь будетъ имѣть знаменателемъ лишь* $N^{k-1}\psi_1(x)$ *и будетъ тоже* **вещественна.**

Дѣйствительно имѣемъ:

$$\frac{\theta(x)}{N^k \psi_1(x)} \equiv \frac{Ax+B}{N^k} + \frac{\theta(x)}{N^k \psi_1(x)} - \frac{Ax+B}{N^k} \equiv \frac{Ax+B}{N^k} + \frac{\theta(x) - (Ax+B)\psi_1(x)}{N^k \psi_1(x)};$$

и чтобы послѣдняя дробь приводилась къ дроби со знаменателемъ $N^{k-1}\psi_1(x)$, ея числитель долженъ дѣлиться безъ остатка на N, т. е. долженъ, между прочимъ, имѣть корень $p+qi$; слѣд., A и B долженъ удовлетворять равенству

$$\theta(p+qi) - [A(p+qi)+B]\psi_1(p+qi) = 0,$$

которое даетъ $$A(p+qi)+B = \frac{\theta(p+qi)}{\psi_1(p+qi)} = M + Ni,$$

гдѣ M и N *вещественныя* числа, *опредѣленныя и конечныя*, ибо по условію $\psi_1(p+qi) \neq 0$, изъ послѣдняго равенства получаемъ:

$$Ap+B=M, \quad Aq=N$$

и, слѣд., $$A=\frac{N}{q}, \quad B=M-Ap,$$

при чемъ эти значенія *опредѣленны*, *конечны* (ибо $q \neq 0$) и *вещественны*. При такихъ величинахъ коэффиціентовъ A и B числитель $\theta(x)-(Ax+B)\psi_1(x)$ раздѣлится, на основаніи № 23-го, на N; обозначая частное черезъ $\theta_1(x)$, и будемъ имѣть

$$\frac{\theta(x)}{N^k \psi_1(x)} \equiv \frac{Ax+B}{N^k} + \frac{\theta_1(x)}{N^{k-1}\psi_1(x)},$$

при чемъ многочленъ $\theta_1(x)$ — навѣрное *вещественный*, ибо представляетъ частное отъ дѣленія двухъ вещественныхъ же многочленовъ: $\theta(x)-(Ax+B)\psi_1(x)$ и N.

Исходя изъ послѣдняго равенства и разсуждая, какъ въ № 14-мъ, заключаемъ, что если знаменатель дроби имѣетъ k-кратный множитель N съ мнимыми корнями $p+qi$ и $p-qi$, то дробь можно разложить на частныя слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\theta(x)}{N^k \psi_1(x)} \equiv \frac{Px+Q}{N^k} + \frac{P_1 x+Q_1}{N^{k-1}} + \ldots + \frac{P_{k-1}x+Q_{k-1}}{N} + \frac{\theta_1(x)}{\psi_1(x)},$$

гдѣ всѣ коэффиціенты вещественны.

25. Такимъ образомъ, если знаменатель $\psi(x)$ **вещественной** раціональной алгебрической дроби имѣетъ, какъ вещественные, такъ и мнимые корни — напр., если

$$\psi(x) \equiv (x-\alpha)^m (x-\beta)^n \ldots (x^2-2px+p^2+q^2)^k (x^2-2rx+r^2+s^2)^h \ldots,$$

то разложеніе ея на частныя дроби съ **вещественными** коэффиціентами будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \equiv f(x) + \frac{A}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-\alpha} +$$

$$+ \frac{B}{(x-\beta)^n} + \frac{B_1}{(x-\beta)^{n-1}} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{x-\beta} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \frac{Px+Q}{(x^2-2px+p^2+q^2)^k} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2-2px+p^2+q^2)^{k-1}} +$$

$$+ \ldots + \frac{P_{k-1}x+Q_{k-1}}{x^2-2px+p^2+q^2} +$$

$$+ \frac{Rx+S}{(x^2-2rx+r^2+s^2)^h} + \frac{R_1x+S_1}{(x^2-2rx+r^2+s^2)^{h-1}} +$$

$$+ \ldots + \frac{R_{h-1}x+S_{h-1}}{x^2-2rx+r^2+s^2} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

гдѣ $f(x)$ — цѣлая часть этой дроби.

26. Что касается нахожденія числителей этого разложенія, то, во-первыхъ, сюда примѣнимъ, конечно, способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, при чемъ изъ всего вышеизложеннаго слѣдуетъ, что получаемыя при этомъ ур-нія будутъ совмѣстны и различны. Во-вторыхъ, можно получать ур-нія, связывающія коэффиціенты числителей, давая числу x различныя частныя значенія. И въ-третьихъ, каждая серія коеффиціентовъ, относящихся къ одному и тому же вещественному корню, можетъ быть получена по «*способу дѣленія*». Кромѣ того, въ частномъ случаѣ, когда

$$\psi(x) \equiv (x^2 - 2px + p^2 + q^2)^k \equiv N^k$$

и, слѣд.,

$$\frac{\theta(x)}{\psi(x)} \equiv \frac{\theta(x)}{N^k} \equiv \frac{Px+Q}{N^k} + \frac{P_1x+Q_1}{N^{k-1}} + \ldots + \frac{P_{k-1}x+Q_{k-1}}{N},$$

мы, умножая это равенство на N^k, получаемъ:

$$\theta(x) \equiv (Px + Q) + \{(P_1 x + Q_1) + (P_2 x + Q_2) N + \ldots . \\ + (P_{k-1} x + Q_{k-1}) N^{k-2}\} N,$$

откуда заключаемъ, что $Px + Q$ есть остатокъ отъ дѣленія $\theta(x)$ на N, а

$$\{(P_1 x + Q_1) + (P_2 x + Q_2) N + \ldots . + (P_{k-1} x + Q_{k-1}) N^{k-2}\}$$

есть частное отъ этого дѣленія; точно такъ же $P_1 x + Q_1$ есть, очевидно, остатокъ отъ дѣленія этого частнаго на N; и т. д.

Прим. 1. $$f(x) \equiv \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1}.$$

Имѣемъ

$$x^4 + x^2 + 1 \equiv x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 \equiv (x^2 + 1)^2 - x^2 \equiv (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x);$$

поэтому $$\frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} \equiv \frac{Px + Q}{x^2 + x + 1} + \frac{Rx + S}{x^2 - x + 1} \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha).$$

1-й способъ — *Неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.*

$$x^2 - 1 \equiv (Px + Q)(x^2 - x + 1) + (Rx + S)(x^2 + x + 1) = \begin{array}{l|l|l|l} P & x^3 + Q & x^2 - Q & x + Q; \\ + R & - P & + P & + S \\ & + S & + S & \\ & + R & + R & \end{array}$$

слѣд., $P + R = 0$, $Q - P + S + R = 1$, $-Q + P + S + R = 0$, $Q + S = -1$,

откуда $$P = -1, \; Q = -\frac{1}{2}, \; R = 1, \; S = -\frac{1}{2},$$

такъ что $$\frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} \equiv \frac{-2x - 1}{2(x^2 + x + 1)} + \frac{2x - 1}{2(x^2 - x + 1)}.$$

2-й способъ — *частныя положенія.*

При $x = 0$ имѣемъ изъ (α): $\quad -1 = Q + S;$

при $x = \pm i$ имѣемъ:

$$-2 = \frac{Pi + Q}{i} + \frac{Ri + S}{-i} \mp P - Qi - R + Si;$$

слѣд., $$P - R = -2, \; -Q + S = 0;$$

а умножая (α) на x и увеличивая x до ∞, получаемъ еще

$$0 = P + R;$$

отсюда найдемъ тѣ же значенія для P, Q, R и S.

Прим. 2.

$$f(x) \equiv \frac{x^5 - 4x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{(x^2 + x + 1)^3} \equiv \frac{Px + Q}{(x^2 + x + 1)^3} + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{P_2 x + Q_2}{x^2 + x + 1}.$$

1-й способъ — *неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.*

$$x^5 - 4x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \equiv Px + Q + (P_1 x + Q_1)(x^2 + x + 1) + (P_2 x + Q_2)(x^2 + x + 1)^2 =$$

$$= \begin{array}{r|r|r|r|l} P_2 x^5 + & Q_2 & x^4 + & P_1 & x^3 + & Q_1 & x^2 + & P & x + Q; \\ + 2P_2 & & + 2Q_2 & & + P_1 & & + Q_1 & & + Q_1 \\ & & + 3P_2 & & + 3Q_2 & & + P_1 & & + Q_2 \\ & & & & + 2P_2 & & + 2Q_2 & & \\ & & & & & & + P_2 & & \end{array}$$

Слѣд.,

$$P_2 = 1, \; Q_2 + 2P_2 = -4, \; P_1 + 2Q_2 + 3P_2 = 1, \; Q_1 + P_1 + 3Q_2 + 2P_2 = -3,$$
$$P + Q_1 + P_1 + 2Q_2 + P_2 = 2, \; Q + Q_1 + Q_2 = -1,$$

откуда $$P_2 = 1, \; Q_2 = -6, \; P_1 = 10, \; Q_1 = 3, \; P = 0, \; Q = 2.$$

2-й способъ — *дѣленіемъ.*

$$\begin{array}{r|l|l} x^5 - 4x^4 + x^3 - 3x_2 + 2x - 1 & x^2 + x + 1 & \\ \hline - x^5 - x^4 - x^3 & x^3 - 5x^2 + 5x - 3 & x^2 + x + 1 \\ \hline - 5x^4 - 3x^2 + 2x - 1 & - x^3 - x^2 - x & x - 6 \\ \hline 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 & - 6x^2 + 4x - 3 & \\ \hline 5x^3 + 2x^2 + 2x - 1 & 6x^2 + 6x + 6 & \\ \hline - 5x^3 - 5x^2 - 5x & 10x + 3 & \\ \hline - 3x^2 - 3x - 1 & & \\ \hline 3x^2 + 3x + 3 & & \\ \hline 2. & & \end{array}$$

Слѣд.,

$$\frac{x^5 - 4x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{(x^2 + x + 1)^3} \equiv \frac{2}{(x^2 + x + 1)^3} + \frac{10x + 3}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{x - 6}{x^2 + x + 1}.$$

Прим. 3.

$$f(x)\equiv\frac{2x^8-5x^7+4x^5-3x^3+7x^2-7}{x^3(x-1)^2(x^2+1)^3}\equiv\frac{A}{x^3}+\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{B_1}{x-1}+$$

$$+\frac{Px+Q}{(x^2+1)^3}+\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+1)^2}+\frac{P_2x+Q_2}{x^2+1}.$$

1-й способъ — *отдѣльное опредѣленіе числителей A и B.*

$$\theta(0+z)=-7+7z^2+\ldots.$$

$$(x-1)^2(x^2+1)^3\equiv(-1+z)^2(1+z^2)^3=(1-2z+z^2)(1+3z^2+\ldots.)=$$

$$=1-2z+z^2+3z^2+\ldots.=1-2z+4z^2+\ldots.$$

$$\begin{array}{l|l}-7+\quad 7z^2+\ldots. & 1-2z+4z^2\\ \hline 7-14z+28z^2 & -7-14z+7z^2;\ \text{слѣд.},\ A=-7,\ A_1=-14,\ A_2=7.\\ \hline -14z+35z^2+\ldots. & \\ \quad 14z-28z^2+\ldots. & \\ \hline \quad 7z^2+\ldots. & \end{array}$$

Далѣе:

$$x=1+z;\ \theta(x)=-7+7(1+z)^2-3(1+z)^3+4(1+z)^5-5(1+z)^7+2(1+z)^8=$$

$$=-7+7+14z+\ldots.-3-9z-\ldots.+4+20z+\ldots.-5-35z-\ldots.$$

$$+2+16z+\ldots.=-2+6z+\ldots.$$

$$x^3(x^2+1)^3=(1+z)^3(1+1+2z+\ldots.)^3=(1+3z+\ldots.)[(8+24z+\ldots.)]=$$

$$=8+24z+24z+\ldots.=8+48z+\ldots.$$

$$\begin{array}{l|l}-2+6z+\ldots. & 8+48z+\ldots.\\ \hline 2+12z & -\frac{1}{4}+\frac{9}{4}z;\qquad \text{слѣд.},\ B=-\frac{1}{4},\ B_1=\frac{9}{4}.\\ \hline 18z+\ldots. & \\ -18z+\ldots. & \end{array}$$

Поэтому

$$\frac{A}{x^3}+\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{B_1}{x-1}=\frac{4(-7-14x+7x^2)(x^2-2x+1)+(9x-10)x^3}{4x^3(x-1)^2}=$$

$$=\frac{28x^4-56x^3-28x^2-56x^3+112x^2+56x+28x^2-56x-28+9x^4-10x^3}{4x^3(x-1)^2}=$$

$$=\frac{37x^4-122x^3+112x^2-28}{4x^3(x-1)^2};$$

слѣд., $\frac{Px+Q}{(x^2+1)^3}+\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+1)^2}+\frac{P_2x+Q_2}{x^2+1}=f(x)-\frac{37x^4-122x^3+112x^2-28}{4x^3(x-1)^2}=$

$$=\frac{\begin{array}{l}8x^8-20x^7+16x^5-12x^3+28x^2-28-37x^{10}+122x^9-112x^8+28x^6+\\+111x^8+366x^7-336x^6+84x^4-111x^6+366x^5-336x^4+84x^2-37x^4+\\+122x^3-112x^2+28\end{array}}{4x^3(x-1)^2(x^2+1)^3}=$$

$$=\frac{-37x^{10}+122x^9-215x^8+346x^7-419x^6+382x^5-289x^4+110x^3}{4x^3(x-1)^2(x^2+1)^3}=$$

$$=\frac{-37x^7+122x^6-215x^5+346x^4-419x^3+382x^2-289x+110}{4(x-1)^2(x^2+1)^3}=$$

$$=\frac{-37x^5+48x^4-82x^3+134x^2-69x+110}{4(x^2+1)^3}.$$

Теперь дѣлаемъ дѣленіе:

$-37x^5+48x^4-82x^3+134x^2-69x+110$	x^2+1	
$37x^5+37x^3$	$-37x^3+48x^2-45x+86$	x^2+1
$48x^4-45x^3+134x^2-69x+110$	$37x^3+37x$	$-37x+48$
$-48x^4-48x^2$	$48x^2-8x+86$	
$-45x^3+86x^2-69x+110$	$-48x^2-48$	
$45x^3+45x$	$-8x+38$	
$86x^2-24x+110$		
$-86x^2-86$		
$-24x+24$		

Значитъ окончательно:

$$\frac{2x^8-5x^7+4x^5-3x^3+7x^2-3}{x^3(x-1)^2(x^2+1)^3}\equiv-\frac{7}{x^3}-\frac{14}{x^2}+\frac{7}{x}-\frac{1}{4(x-1)^2}+\frac{9}{4(x-1)}=$$

$$+\frac{-6x+6}{(x^2+1)^3}+\frac{-4x+19}{2(x^2+1)^2}+\frac{-37x+48}{4(x^2+1)}.$$

2-й способъ — *неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.*

$$2x^8-5x^7+4x^5-3x^3+7x^2-7\equiv(A+A_1x+A_2x^2)(x^2-2x+1)(x^6+$$

$$+3x^4+3x^2+1)+(B+B_1x-B_1)(x^9+3x^7+3x^5+x^3)+(Px+Q+$$

$$+P_1x^3+Q_1x^2+P_1x+Q_1+P_2x^5+Q_2x^4+2P_2x^3+2Q_2x^2+P_2x+Q_2)(x^5+$$

$$-2x^4+x^3)=A_2+B_1+P_2)x^{10}+(-2A_2+A_1+B-B_1+Q_2-2P_2)x^9+$$

$$+(4A_2-2A_1+A+3B_1+P_1+2P_2-2Q_2+P_2)x^8+(-6A_2+4A_1-2A+$$

$$+3B-3B_1+Q_1+2Q_2-2P_1-4P_2+Q_2)x^7+(6A_2-6A_1+4A+3B_1+$$

$$+P+P_1+P_2-2Q_1-4Q_2+P_1+2P_2)x^6+(-6A_2+6A_1-6A+3B+$$

$$-3B_1+Q+Q_1+Q_2-2P-2P_1-2P_2+Q_1+2Q_2)x^5+(4A_2-6A_1+6A+$$

$$+B_1-2Q-2Q_1-2Q_2+P+P_1+P_2)x^4+(-2A_2+4A_1-6A+B-B_1+$$

$$+Q+Q_1+Q_2)x^3+(A_2-2A_1+4A)x^2+(A_1-2A)x+A;$$

значитъ,
$$A=-7,\ A_1-2A=0;\ A_2-2A_1+4A=7,$$

$$-2A_2+4A_1-6A+B-B_1+Q+Q_1+Q_2=-3,$$

$$4A_2-6A_1+6A+B_1-2Q-2Q_1-2Q_2+P+P_1+P_2=0,$$

$$-6A_2+6A_1-6A+3B-3B_1+Q+2Q_1+3Q_2-2P-2P_1-2P_2=4,$$

$$6A_2-6A_1+4A+3B_1+P+2P_1+3P_2-2Q_1-4Q_2=0,$$

$$-6A_2+4A_1-2A+3B-3B_1+Q_1+3Q_2-2P_1-4P_2=-5,$$

$$4A_2-2A_1+A+3B_1+P_1+3P_2-2Q_2=2,$$

$$-2A_2+A_1+B-B_1+Q_2-2P_2=0,\ A_2+B_1+P_2=0$$

или
$$A=-7,\ A_1=-14,\ A_2=7,$$

$$B-B_1+Q+Q_1+Q_2=25,\ B_1-2Q-2Q_1-2Q_2+P+P_1+P_2=-70$$

$$3B-3B_1+Q+2Q_1+3Q_2-2P-2P_1-2P_2=88,$$

$$3B_1+P+2P_1+3P_2-2Q_1-4Q_2=-98,\ 3B-3B_1+Q_1+3Q_2-2P_1-4P_2=79,$$

$$3B_1+P_1+3P_2-2P_2=-47,\ B-B_1+Q_2-2P_2=28,\ B_1+P_2=-7,$$

откуда
$$A=-7,\ A_1=-14,\ A_2=7,\ B=-\frac{1}{4},\ B_1=\frac{9}{4},$$

$$P=-6,\ Q=6,\ P_1=-2,\ Q_1=\frac{19}{2},\ P_2=-\frac{37}{4},\ Q_2=12.$$

§ 2. Интегрированіе раціональныхъ дробей.

27. Такъ какъ «*интегралъ суммы равенъ суммѣ интеграловъ слагаемыхъ*», а на основаніи № 25-го всякая раціональная дробь можетъ быть представлена въ видѣ суммы *вещественныхъ* слагаемыхъ трехъ слѣдующихъ видовъ:

$$Ax^k,\ \frac{A}{(x-\alpha)^k}\ \text{и}\ \frac{Px+Q}{(x^2-2px+p^2+q^2)^k},$$

при чемъ мы уже знаемъ, что

$$\int Ax^k\,dx = \frac{Ax^{k+1}}{k+1} + C,$$

$$\int \frac{Adx}{(x-\alpha)^k} = -\frac{A}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} + C \text{ при } k \neq 1 \quad \text{и} \quad \int \frac{Adx}{x-\alpha} = Al(x-\alpha) + C,$$

то, слѣд., для того, чтобы проинтегрировать всякую раціональную алгебрическую дробь остается найти лишь выраженіе для

$$\int \frac{Px+Q}{(x^2-2px+p^2+q^2)^k}\,dx \quad \text{или, общнее, для} \quad \int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx,$$

въ которомъ *всѣ коэффиціенты вещественны, корни же трехчлена въ знаменателѣ мнимы.*

28. **Теорема.** *Интегралъ* $\int \frac{\theta(x)}{[\varphi(x)]^k}\,dx$, *въ которомъ* $\theta(x)$ *и* $\varphi(x)$ — *цѣлые многочлены,* **изъ коихъ второй не имѣетъ кратныхъ корней,** *а дробь* $\frac{\theta(x)}{[\varphi(x)]^k}$ — *правильная, равенъ суммѣ* **правильной** *же алгебрической дроби, имѣющей знаменателемъ* $(k-1)$**'ую** *степень многочлена* $\varphi(x)$, *и интеграла отъ* **правильной** *же алгебрической дроби, имѣющей знаменателемъ* **первую** *степень того же многочлена.*

Дѣйствительно, такъ какъ многочлѣнъ $\varphi(x)$ не имѣетъ кратныхъ корней, то $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ — взаимно простые, а слѣд., (см. № 17) можемъ навѣрное найти два такихъ цѣлыхъ многочлена $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$, что

$$\frac{\theta(x)}{\varphi(x)\varphi'(x)} \equiv \frac{\omega_1(x)}{\varphi(x)} + \frac{\omega_2(x)}{\varphi'(x)},$$

откуда $$\theta(x) \equiv \omega_1(x).\varphi'(x) + \omega_2(x).\varphi(x);$$

поэтому $$\int \frac{\theta(x)}{[\varphi(x)]^k}\,dx = \int \frac{\omega_1(x)\varphi'(x) + \omega_2(x)\varphi(x)}{[\varphi(x)]^k}\,dx =$$

$$= \int \frac{\omega_1(x).\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^k}\,dx + \int \frac{\omega_2(x)}{[\varphi(x)]^{k-1}}\,dx = \int \omega_1(x)\,d\left\{-\frac{1}{(k-1)[\varphi(x)]^{k-1}}\right\} +$$

$$+\int\frac{\omega_2(x)}{[\varphi(x)]^{k-1}}dx=-\frac{\omega_1(x)}{(k-1)[\varphi(x)]^{k-1}}+\int\frac{\omega'_1(x)}{(k-1)[\varphi(x)]^{k-1}}dx+\int\frac{\omega_2(x)}{[\varphi(x)]^{k-1}}=$$

$$=-\frac{\omega_1(x)}{(k-1)[\varphi(x)]^{k-1}}+\int\frac{\frac{\omega'_1(x)}{k-1}+\omega_2(x)}{[\varphi(x)]^{k-1}}dx,$$

т. е. $$\int\frac{\theta(x)}{[\varphi(x)]^k}dx=\frac{\psi_1(x)}{[\varphi(x)]^{k-1}}+\int\frac{\theta_1(x)}{[\varphi(x)]^{k-1}}dx, \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

гдѣ положено $\psi_1(x)\equiv-\frac{\omega_1(x)}{k-1}$ и $\theta_1(x)\equiv\frac{\omega'_1(x)}{k-1}+\omega_2(x)$; при этомъ обѣ дроби въ правой части — навѣрное правильныя, ибо $k-1\geqslant 1$, степени же многочленовъ $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ ниже степени $\varphi(x)$.

Если $k-1>1$, то подобнымъ же образомъ будемъ имѣть что

$$\int\frac{\theta_1(x)}{[\varphi(x)]^{k-1}}dx=\frac{\psi_2(x)}{[\varphi(x)]^{k-2}}+\int\frac{\theta_2(x)}{[\varphi(x)]^{k-2}}dx$$

и, слѣд., $$\int\frac{\theta(x)}{[\varphi(x)]^k}dx=\frac{\psi_1(x)}{[\varphi(x)]^{k-1}}+\frac{\psi_2(x)}{[\varphi(x)]^{k-2}}+\int\frac{\theta_2(x)}{[\varphi(x)]^{k-2}}dx;$$

продолжая такъ, если надо, далѣе и соединяя всѣ члены правой части, не содержащіе знака интеграла, въ одинъ, и получимъ равенство:

$$\int\frac{[\theta(x)}{[\varphi(x)]^k}dx=\frac{\omega(x)}{[\varphi(x)]^{k-1}}+\int\frac{\Omega(x)}{\varphi(x)}dx,$$

выражающее доказываемую теорему.

29. **Слѣдствіе.** Если дробь $\frac{\theta(x)}{\psi(x)}$ — правильная и

$$\psi(x)\equiv(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\ldots.(ax^2+bx+c)^k(ex^2+fx+g)^h\ldots.,$$

при чемъ числа $\alpha, \beta, \ldots.$ вещественны, а корни трехчленовъ ax^2+bx+c, $ex^2+fx+g, \ldots.$ мнимы, то на основаніи № 25-го имѣемъ:

$$\frac{\theta(x)}{\psi(x)} \equiv \frac{A_0}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{m-1}} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{m-2}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-\alpha} +$$

$$+ \frac{B_0}{(x-\beta)^n} + \frac{B_1}{(x-\beta)^{n-1}} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{x-\beta} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \frac{A x_0 + B_0}{(ax^2+bx+c)^k} + \frac{A_1 x + B_1}{(ax^2+bx+c)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_{k-1} x + B_{k-1}}{ax^2+bx+c} +$$

$$+ \frac{E_0 x + F_0}{(ex^2+fx+g)^h} + \frac{E_1 x + F_1}{(ex^2+fx+g)^{h-1}} + \ldots + \frac{E_{h-1} x + F_{h-1}}{ex+fx+g} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

соединяя въ этомъ разложеніи всѣ члены каждой строчки — въ одинъ, получаемъ:

$$\frac{\theta(x)}{\psi(x)} = \frac{f_1(x)}{(x-\alpha)^m} + \frac{f_2(x)}{(x-\beta)^n} + \ldots + \frac{\theta_1(x)}{(ax^2+bx+c)^k} + \frac{\theta_2(x)}{(ex^2+fx+g)^h} + \ldots$$

и, слѣд., $$\int \frac{\theta(x)}{\psi(x)}\,dx = \int \frac{f_1(x)}{(x-\alpha)^m}\,dx + \int \frac{f_2(x)}{(x-\beta)^n}\,dx + \ldots$$

$$+ \int \frac{\theta_1(x)}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx + \int \frac{\theta_2(x)}{(ex^2+fx+g)^h}\,dx + \ldots$$

при чемъ всѣ подъинтегральныя дроби — правильны.

Но на основаніи теоремы предъидущаго № имѣемъ:

$$\int \frac{f_1(x)}{(x-\alpha)^m}dx = \frac{F_1(x)}{(x-\alpha)^{m-1}} + \int \frac{A}{x-\alpha}dx, \quad \int \frac{f_2(x)}{(x-\beta)^n}dx = \frac{F_2(x)}{(x-\alpha)^{n-1}} + \int \frac{B}{x-\beta}\,dx, \ldots$$

$$\int \frac{\theta_1(x)\,dx}{(ax^2+bx+c)^k} = \frac{\omega_1(x)}{(ax^2+bx+c)^{k-1}} + \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx,$$

$$\int \frac{\theta_2(x)\,dx}{(ex^2+fx+g)^h} = \frac{\omega_2(x)}{(ex^2+fx+g)^{h-1}} + \int \frac{Ex+F}{ex^2+fx+g}\,dx, \ldots$$

а, слѣд., $$\int \frac{\theta(x)}{\psi(x)}\,dx = \frac{F_1(x)}{(x-\alpha)^{m-1}} + \frac{F_2(x)}{(x-\beta)^n} + \ldots$$

$$+ \frac{\omega_1(x)}{(ax^2+bx+c)^{k-1}} + \frac{\omega_2(x)}{(ex^2+fx+g)^{h-1}} + \ldots$$

$$+ \int \frac{A}{x-\alpha}\,dx + \int \frac{B}{x-\beta}\,dx + \ldots \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx + \int \frac{Ex+F}{ex^2+fx+g}\,dx + \ldots,$$

при чемъ всѣ дроби въ правой части — правильныя.

Соединяя теперь всѣ члены первой строчки послѣдняго равенства — въ одинъ, окончательно получаемъ:

$$\int \frac{\theta(x)\,dx}{(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\ldots.(ax^2+bx+c)^k(ex^2+fx+g)^h\ldots.} =$$

$$= \frac{\omega(x)}{(x-\alpha)^{m-1}(x-\beta)^{n-1}\ldots.(ax^2+bx+c)^{k-1}(ex^2+fx+g)^{h-1}} +$$

$$+ \int \frac{A}{x-\alpha}\,dx + \int \frac{B}{x-\beta}\,dx + \ldots. + \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx + \int \frac{Ex+F}{ex^2+fx+g}\,dx + \ldots.;$$

такъ что, слѣд., *интегралъ отъ* **правильной** *раціональной алгебрической дроби равенъ* **правильной** *же раціон. дроби, знаменатель коей состоитъ изъ тѣхъ же множителей, какъ и знаменатель подъинтегральной дроби, но въ степеняхъ* **на единицу низшихъ**, *сложенной съ добавочными интегралами отъ* **правильныхъ** *же раціон. дробей, имѣющихъ знаменателями помянутые множители* **въ первыхъ степеняхъ.**

Эта теорема и даетъ **правило интегрированія** *любой правильной раціон. алгебрической дроби*, при чемъ *коэфиціенты числителей всѣхъ дробей правой части послѣдняго равенства найдемъ «по способу неопредѣленныхъ коэфиціентовъ»*, **предварительно продифференцировавъ это равенство**; если же интегрируемая дробь — *не правильная*, то надо *предварительно выдѣлить изъ нея цѣлую часть* (интегралъ ея найти умѣемъ), а съ оставшейся *правильной* дробью поступить, какъ указано.

Прим. 1.

$$I = \int \frac{3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 9x + 1}{(x-1)^3(x+2)^2}\,dx = \frac{Ax^2+Bx+D}{(x-1)^2(x+2)} + \int \frac{E\,dx}{x-1} + \int \frac{F\,dx}{x+2}.$$

Дифференцированіе этого равенства даетъ:

$$\frac{3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 9x + 1}{(x-1)^3(x+2)^2} =$$

$$= \frac{(x-1)^2(x+2)[2Ax+B] - (Ax^2+Bx+D)[2(x-1)(x+2)+(x-1)^2]}{(x-1)^4(x+2)^2} +$$

$$+\frac{E}{x-1}+\frac{F}{x+2}=\frac{(x^2+x-2)(2Ax+B)-(Ax^2+Bx+D)(3x+3)}{(x-1)^3(x+2)^2}+$$

$$+\frac{E}{x-1}+\frac{F}{x+2};$$

освобождаясь отъ знаменателя, получаемъ:

$$3x^4-2x^3-9x^2+9x+1=(x^2+x-2)(2Ax+B)-(Ax^2+Bx+D)(3x+3)+$$

$$+E(x-1)^2(x+2)^2+F(x-1)^3(x+2)=$$

$$=E\left|\begin{array}{l|l|l|l} x^4+2A & x^3+2A & x^2-4A & x-2B; \\ -3A & +B & +B & -3D \\ +2E & -3B & -3D & +4E \\ -3F & -3A & -3B & -2F \\ +2F & -3E & -4E & \\ & +3F & -F & \\ & -6F & +6F & \end{array}\right.$$

отсюда

$$\begin{array}{r|r} E+F=3 & E+F=3; \\ \underline{-A+2E-F=-2} & \\ -A-2B-3E-3F=-9 & 2B+5E+2F=7 \\ -4A-2B-3D-4E+5F=9 & -2B-3D-12E+9F=17 \\ -2B-3D+4E-2F=1 & \underline{-2B-3D+4E-2F=1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \underline{E+F=3} & \\ 2B+5E+2F=7 & 2B+3E=1 \\ 16E-11F=-16 & 27E=17; \end{array}$$

$$E=\frac{17}{27},\quad B=-\frac{4}{9},\quad F=\frac{64}{27},\quad D=-\frac{7}{9},\quad A=\frac{8}{9}$$

и, слѣд., $$I=\frac{8x^2-4x-7}{9(x-1)^2(x+2)}+\frac{17}{27}l(x-1)+\frac{64}{27}l(x+2)+C.$$

Прим. 2.

$$I=\int\frac{5x^6-3x^2+8}{(x-1)^3(x^2+1)^2}\,dx=\frac{Ax^3+Bx^2+Dx+E}{(x-1)^2(x^2+1)}+\int\frac{Fdx}{x-1}+\int\frac{Gx+H}{x^2+1}\,dx.$$

Дифференцированіе даетъ: $\frac{5x^6-3x^2+8}{(x-1)^3(x^2+1)^2}=$

$$=\frac{(x-1)^2(x^2+1)(3Ax^2+2Bx+D)-(Ax^3+Bx^2+Dx+E)[2(x-1)(x^2+1)+2x(x-1)^2]}{(x-1)^4(x^2+1)^2}+$$

$$+\frac{F}{x-1}+\frac{Gx+H}{x^2+1}=$$

$$=\frac{(x^3-x^2+x-1)(3Ax^2+2Bx+D)-(Ax^3+Bx^2+Dx+E)(4x^2-2x+2)}{(x-1)^3(x^2+1)^2}+\frac{F}{x-1}+\frac{Gx+H}{x^2+1}$$

и, слѣд. (по освобожденіи отъ знаменателя):

$$5x^6-3x^2+8=(x^3-x^2+x-1)(3Ax^2+2Bx+D)+$$

$$-(Ax^3+Bx^2+Dx+E)(4x^2-2x+2)+F(x-1)^2(x^2+1)^2+(Gx+H)(x-1)^3(x^2+1)=$$

$=F$	x^6+3A	x^5-3A	x^4+3A	x^3-3A	x^2-2B	$x-D$
$+G$	$-4A$	$+2B$	$-2B$	$+2B$	$+D$	$-2E$
	$-2F$	$-4B$	$+D$	$-D$	$+2E$	$+F$
	$-3G$	$+2A$	$-4D$	$-4E$	$-2D$	$-H,$
	$+H$	$+3F$	$+2B$	$+2D$	$-2F$	
		$+4G$	$-2A$	$-2B$	$-G$	
		$-3H$	$-4F$	$+3F$	$+3H$	
			$-4G$	$+3G$		
			$+4H$	$-4H$		

откуда:

$F+G=5$			
$-A-2F-3G+H=0$		$A+F+H=15$	
$-A-2B+3F+4G-3H=0$		$A+2B+F+3H=20$	$2B+2F+4H=35$
$A-3D-4F-4G+4H=0$		$A-3D+4H=20$	$-3D+F+5H=35$
$-3A+D-4E+3F+3G-4H=-3$		$3A-D+4E+4H=18$	$-D+4E+3F+7H=63$
$-2B-D+2E-2F-G+3H=0$		$-2B-D+2E-F+3H=5$	$-2B-D+2E-F+3H=5$
$-D-2E+F-H=8$		$-D-2E+F-H=8$	$-D-2E+F-H=8$

$-3D+F+5H=35$	$-3D+F+5H=35$	$4F=44$
$-D+4E+3F+7H=63$	$-3D+5F+5H=79$	$2F+4H=37;$
$-D+2E+F+7H=40$	$-D+F+3H=24$	
$-D-2E+F-H=8$		

$$F=11,\ H=\frac{15}{4},\ D=-\frac{7}{4},\ E=\frac{1}{2},\ B=-1,\ A=-\frac{1}{4},\ G=-6$$

и, слѣд., $$I=\frac{-x^3-4x^2-7x+2}{4(x-1)^2(x^2+1)}+11\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{-6x+\frac{15}{4}}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{-x^3-4x^2-7x+2}{4(x-1)^2(x^2+1)}+11\,l(x-1)-3\,l(x^2+1)+\frac{15}{4}\operatorname{Arctg}x+C.$$

30. Чтобы закончить вопросъ объ интегрированіи раціональной алгебр. дроби, намъ остается еще найти

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx,$$

въ которомъ корни знаменателя дроби—мнимы, т.-е. $b^2-4ac<0$.

Съ этой цѣлью покажемъ, что такой трехчленъ всегда можно привести къ виду z^2+1, при чемъ, для краткости, положимъ

$$b^2-4ac=-h^2$$

и будемъ h называть **„числомъ, указывающимъ мнимость корней“.**

Лемма. *Чтобы трехчленъ 2-ой степени: ax^2+bx+c преобразовать въ другой, не имѣющій члена 1-ой степени, надо его производную приравнять произведенію новой перемѣнной на произвольный коэффиціентъ.*

Дѣйствительно, полагая $(ax^2+bx+c)'_x=Nz$,

т.-е. $2ax+b=Nz$, имѣемъ $x=\frac{Nz-b}{2a}$,

а потому $$ax^2+bx+c=\frac{4a^2x^2+4abx+4ac}{4a}=$$

$$=\frac{(2ax+b)^2-b^2+4ac}{4a}=\frac{N^2z^2+(4ac-b^2)}{4a}.$$

Слѣдствіе. *Чтобы трехчленъ ax^2+bx+c, имѣющій мнимые корни, привести къ виду $M(z^2+1)$, надо его производную при-*

равнять произведенію новой перемѣнной на число, указывающее мнимость корней; дѣйствительно, полагая

$$b^2 - 4ac = -h^2 \text{ и } \underline{(ax^2 + bx + c)'_x \equiv hz},$$

т.-е. считая въ предыдущемъ равенствѣ $N = h$, получаемъ

$$ax^2 + bx + c \equiv \frac{h^2}{4a}(z^2 + 1).$$

31. Дѣлая такую подстановку въ интегралѣ $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$ и имѣя въ виду, что ур-ніе

$$2ax + b = hz$$

даетъ $x = \frac{hz - b}{2a}$, откуда еще $dx = \frac{h}{2a} dz$, получаемъ:

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{A\frac{hz - b}{2a} + B}{\frac{h^2}{4a}(z^2 + 1)} \frac{h}{2a} dz = \frac{1}{ah} \int \frac{Ahz + (2Ba - Ab)}{z^2 + 1} dz =$$

$$= \frac{A}{a} \int \frac{z dz}{z^2 + 1} + \frac{2Ba - Ab}{ah} \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{A}{2a} \int \frac{2z dz}{z^2 + 1} + \frac{2Ba - Ab}{ah} \int \frac{dz}{z^2 + 1} =$$

$$= \frac{A}{2a} l(z^2 + 1) + \frac{2Ba - Ab}{ah} \operatorname{Arctg} z + C =$$

$$= \frac{A}{2a} l\left[\frac{4a}{h^2}(ax^2 + bx + c)\right] + \frac{2Ba - Ab}{ah} \operatorname{Arctg} \frac{2ax + b}{h} + C =$$

$$= \frac{A}{2a} l(ax^2 + bx + c) + \frac{2Ba - Ab}{ah} \operatorname{Arctg} \frac{2ax + b}{h} + C_1,$$

гдѣ $$C_1 = \frac{A}{2a} l \frac{4a}{h^2} + C.$$

Такимъ образомъ, *для нахожденія* $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$, *въ которомъ корни знаменателя подъинтегральной дроби мнимы, надо производную знаменателя приравнять произведенію новой перемѣнной на число, указывающее эту мнимость, и затѣмъ разбить интегралъ на сумму двухъ другихъ.*

Прим. 1. Найти $$I=\int\frac{(4x-5)\,dx}{x^2+2x+2}.$$

Здѣсь $$b^2-4ac=2^2-4.2=-4;$$

полагая поэтому $$(x^2+2x+2)'_x=2z,$$

имѣемъ: $$2x+2=2z \quad \text{или} \quad x+1=z;$$

слѣд., $$x^2+2x+2=(x+1)^2+1=z^2+1 \quad \text{и} \quad dx=dz,$$

а потому $$I=\int\frac{(4z-9)\,dz}{z^2+1}=\int\frac{4z\,dz}{z^2+1}-\int\frac{9dz}{z^2+1}=2l(z^2+1)-9\operatorname{Arctg}z+C=$$

$$=2l(x^2+2x+2)-9\operatorname{Arctg}(x+1)+C.$$

Прим. 2. Найти $$I=\int\frac{4x^5-3x^4+6x^3-2x^2+x+7}{(2x^2+4x+3)^3}\,dx.$$

Здѣсь $$b^2-4ac=4^2-4.2.3=-8<0;$$

поэтому $$\int\frac{4x^5-3x^4+6x^3-2x^2+x+7}{(2x^2+4x+3)^3}\,dx=$$

$$=\frac{Ax^3+Bx^2+Dx+E}{(2x^2+4x+3)^2}+\int\frac{Fx+H}{2x^2+4x+3}\,dx;$$

дифференцированіе этого равенства даетъ:

$$\frac{4x^5-3x^4+6x^3-2x^2+x+7}{(2x^2+4x+3)^3}=$$

$$=\frac{(2x^2+4x+3)(3Ax^2+2Bx+D)-(Ax^3+Bx^2+Dx+E)\,2\,(4x+4)}{(2x^2+4x+3)^3}+\frac{Fx+H}{2x^2+4x+3}$$

и слѣд.,

$$4x^5-3x^4+6x^3-2x^2+x+7=(2x^2+4x+3)(3Ax^2+2Bx+D)+$$

$$-(Ax^3+Bx^2+Dx+E)(8x+8)+(Fx+H)(2x^2+4x+3)^2=$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
=4Fx^5+4H & x^4+16H & x^3+28H & x^2+24H & x+9H;\\
+16F & +28F & +24F & +9F & +3D\\
+6A & +12A & +9A & +6B & -8E\\
-8A & +4B & +8B & +4D & \\
 & -8B & +2D & -8E & \\
 & -8A & -8D & -8D & \\
 & & -8B & &
\end{array}$$

отсюда

$$\begin{array}{r|r|r}
4F = 4 & F = 1 & \\
4H + 16F - 2A = -3 & 4H - 2A = -19 & 4H - 2A = -19 \\
16H + 28F + 4A - 4B = 6 & 16H + 4A - 4B = -22 & 8H + 2A - 2B = -11 \\
28H + 24F + 9A - 6D = -2 & 28H + 9A - 6D = -26 & 28H + 9A - 6D = -26 \\
24H + 9F + 6B - 4D - 8E = 1 & 24H + 6B - 4D - 8E = -8 & 15H + 6B - 7D = -15 \\
9H + 3D - 8E = 7 & 9H + 3D - 8E = 7 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l}
12H - 2B = -30 & & \\
92H - 12D = -223 & 92H - 12D = -223 & \\
15H + 6B - 7D = -15 & 51H - 7D = -105 & 32H = -301;
\end{array}$$

$$H = -\frac{301}{32};\ D = -\frac{1713}{32};\ B = -\frac{1326}{32};\ A = -\frac{298}{32};\ E = -\frac{1009}{32};\ F = 1$$

и, слѣд., $\dot{I} = -\dfrac{298x^3 + 1326x^2 + 1713x + 1009}{32(2x^2 + 4x + 3)^2} + \dfrac{1}{32}\displaystyle\int \frac{32x - 301}{2x^2 + 4x + 3}\,dx.$

Для нахожденія послѣдняго интеграла полагаемъ $(2x^2 + 4x + 3)'_x = \sqrt{8}.z$,

т.-е.
$$4x + 4 = \sqrt{8}.z;$$

тогда
$$x + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,z,$$

$$2x^2 + 4x + 3 = 2(x^2 + 2x + 1) + 1 = 2(x + 1)^2 + 1 = z^2 + 1,\ dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\,dz,$$

а слѣд., $\displaystyle\int \frac{32x - 301}{2x^2 + 4x + 3}\,dx = \int \frac{16\sqrt{2}.z - 333}{z^2 + 1}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,dz = 16\int \frac{z\,dz}{z^2 + 1} +$

$$-\frac{333\sqrt{2}}{2}\int \frac{dz}{z^2 + 1} = 8l(z^2 + 1) - \frac{333\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{Arctg}\,z + C =$$

$$= 8l(2x^2 + 4x + 3) - \frac{333\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{x + 1}{\sqrt{2}} + C.$$

Прим. 3. Найти $\dot{I} = \displaystyle\int \frac{x^7 - 3x^5 + 4x^2 - 2}{x^2(x^2 + 2x + 2)^2}\,dx.$

Прежде всего выдѣляемъ цѣлую часть:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^7 & & -3x^5 & & & +4x^2 & -2 & x^6 + 4x^5 + 8x^4 + 8x^3 + 4x^2 \\
\cline{8-8}
-x^7 & -4x^6 & -8x^5 & -8x^4 & -4x^3 & & & x - 4 \\
\cline{1-7}
 & -4x^6 & -11x^5 & -8x^4 & -4x^3 & +4x^2 & -2 & \\
 & 4x^6 & +16x^5 & +32x^4 & +32x^3 & +16x^2 & & \\
\cline{1-7}
 & & 5x^5 & +24x^4 & +28x^3 & +20x^2 & -2 &
\end{array}$$

слѣд., $$I=\int(x-4)\,dx+\int\frac{5x^5+24x^4+28x^3+20x^2-2}{x^2(x^2+2x+2)^2}\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+J,$$

гдѣ $$J=\int\frac{5x^5+24x^4+28x^3+20x^2-2}{x^2(x^2+2x+2)^2}\,dx=\frac{Ax^2+Bx+D}{x(x^2+2x+2)}+$$

$$+\int\frac{E\,dx}{x}+\int\frac{Fx+H}{x^2+2x+2}\,dx;$$

дифференцируя послѣднее равенство и освобождаясь отъ знаменателя, получаемъ:

$$5x^5+24x^4+28x^3+20x^2-2=(x^3+2x^2+2x)(2Ax+B)+$$

$$-(Ax^2+Bx+D)(3x^2+4x+2)+Ex(x^2+2x+2)^2+(Fx+H)x^2(x^2+2x+2)=$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l}
=F & x^5+H & x^4+2H & x^3+2H & x^2+2B & x-2D,\\
+E & +2F & +2F & +2B & -4D & \\
 & +2A & +B & +4A & -2B & \\
 & -3A & +4A & -3D & +4E & \\
 & +4E & -3B & -4B & & \\
 & & -4A & -2A & & \\
 & & +8E & +8E & &
\end{array}$$

откуда $$\begin{array}{rl|rl}
F+E= & 5 & D= & 1\\
H+2F+4E-A= & 24 & E= & 1\\
2H+2F+8E-2B= & 28 & F= & 4\\
2H+8E-3D-2B+2A= & 20 & H-A= & 12\\
\underline{4E-4D=} & \underline{0} & 2H-2B= & 12\\
\underline{-2D=} & \underline{-2} & 2H-2B+2A= & 15
\end{array}\quad A=\frac{3}{2};\ H=\frac{27}{2};\ B=\frac{15}{2};$$

Поэтому $$J=\frac{3x^2+15x+2}{2x(x^2+2x+2)}+\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{8(x+1)+19}{(x+1)^2+1}\,dx=$$

$$=\frac{3x^2+15x+2}{2x(x^2+2x+2)}+lx+2l(x^2+2x+2)+\frac{19}{2}\operatorname{Arctg}(x+1)+C.$$

32. Интегралъ $$\underline{I_m=\int\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m}\,dx,}$$

въ которомъ корни трехчлена ax^2+bx+c мнимы, удобнѣе всего искать по

вышеуказанному правилу — написавъ, что

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m}\,dx = \frac{\theta(x)}{(ax^2+bx+c)^{m-1}} + \int \frac{A_0 x + B_0}{ax^2+bx+c}\,dx,$$

гдѣ $\theta(x)$ — цѣлый многочленъ, степень коего ниже $2(m-1)$'ой; но можно такой интегралъ J_m найти и непосредственно, приведя предварительно трехчленъ ax^2+bx+c къ виду z^2+1. Именно,

полагая $(ax^2+bx+c)'_x = hz$, т.-е. $2ax+b = hz$,

имѣемъ: $x = \frac{hz-b}{2a}$, $dx = \frac{h}{2a}\,dz$, $ax^2+bx+c = \frac{h^2}{4a}(z^2+1)$

и, слѣд.,
$$J_m = \int \frac{A\frac{hz-b}{2a}+B}{\left(\frac{h^2}{4a}\right)^m (z^2+1)^m}\,\frac{h}{2a}\,dz =$$

$$= \frac{A}{a}\left(\frac{4a}{h^2}\right)^{m-1}\int \frac{z\,dz}{(z^2+1)^m} + \frac{2aB-Ab}{ah}\left(\frac{4a}{h^2}\right)^{m-1}\int \frac{dz}{z^2+1};$$

такимъ образомъ нахожденіе интеграла J_m приводится къ нахожденію интегралов: $H_m = \int \frac{z\,dz}{(z^2+1)^m}$ и $K_m = \int \frac{dz}{(z^2+1)^m}$.

Для перваго изъ нихъ получаемъ непосредственно, что

$$H_m = \int \frac{z\,dz}{(z^2+1)^m} = \frac{1}{2}\int \frac{2z\,dz}{(z^2+1)^m} = \frac{1}{2}\int \frac{d(z^2+1)}{(z^2+1)^m} =$$

$$= -\frac{1}{2(m-1)(z^2+1)^{m-1}} + C \quad \text{при } m \neq 1 \ldots\ldots (6)$$

и
$$H_1 = \int \frac{z\,dz}{z^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(z^2+1)}{z^2+1} = \frac{1}{2}l(z^2+1) + C \ldots\ldots (7)$$

Что же касается K_m, то его легко выразить помощью H_m и K_{m-1}, *разлагая его на два и интегрируя затѣмъ одинъ изъ членовъ по частямъ;* именно,

$$K_m = \int \frac{dz}{(z^2+1)^m} = \int \frac{1.dz}{(z^2+1)^m} = \int \frac{(1+z^2-z^2)\,dz}{(z^2+1)^m} = \int \frac{(1+z^2)\,dz}{(z^2+1)^m} +$$

$$-\int \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^m} = \int \frac{dz}{(z^2+1)^{m-1}} - \int z\,\frac{z\,dz}{(z^2+1)^m} = K_{m-1} +$$

$$-\int z\,dH_m = K_{m-1} - \left[zH_m - \int H_m\,dz\right] = K_{m-1} - zH_m +$$

$$+\int -\frac{1}{2(m-1)(z^2+1)^{m-1}}\,dz = K_{m-1} - zH_m +$$

$$-\frac{1}{2(m-1)}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{m-1}} = K_{m-1} - zH_m - \frac{1}{2(m-1)}K_{m-1},$$

т.-е.
$$K_m = \frac{2m-3}{2m-2}K_{m-1} - zH_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Пользуясь этимъ равенствомъ мы можемъ постепенно понизить указатель у K_m до единицы, т.-е. выразить K_m помощью H_m, H_{m-1},....H_2, H_1 и K_1; при $m=1$, т.-е. для K_1 равенство (8) уже не примѣнимо, но тогда имѣемъ непосредственно, что

$$K_1 = \int\frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{Arctg} z + C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Прим. 1. Найти $\quad I = \int\frac{(4x-5)\,dx}{(x^2+2x+2)^4}.$

Здѣсь $\quad b^2 - 4ac = 2^2 - 4.1.2 = -4$; слѣд., $h=2$,

а потому полагаемъ $\quad (x^2+2x+2)'_x = 2z$, т.-е. $2x+2=2z$,

откуда $\quad x = z-1$ и $dx = dz$,

такъ что

$$I = \int\frac{4(z-1)-5}{[(z-1)^2+2(z-1)+2]^4}\,dz = \int\frac{4z-9}{(z^2+1)^4}\,dz = 4\int\frac{z\,dz}{(z^2+1)^4} - 9\int\frac{dz}{(z^2+1)^4}.$$

Затѣмъ $\quad \int\frac{z\,dz}{(z^2+1)^4} = -\frac{1}{2.3(z^2+1)^3} + C'$

и $\int\frac{dz}{(z^2+1)^4} = \int\frac{(1+z^2-z^2)\,dz}{(z^2+1)^4} = \int\frac{dz}{(z^2+1)^3} - \int z\,\frac{z\,dz}{(z^2+1)^4} = \int\frac{dz}{(z^2+1)^3} +$

$$-\int z\,d\left[-\frac{1}{2.3(z^2+1)^3}\right] = \int\frac{dz}{(z^2+1)^3} + \frac{z}{6(z^2+1)^3} - \frac{1}{6}\int\frac{dz}{(z^2+1)^3} =$$

$$= \frac{z}{6(z^2+1)^3} - \frac{5}{6}\int\frac{dz}{(z^2+1)^3};$$

въ свою очередь

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^3} = \int\frac{(1+z^2-z^2)\,dz}{(z^2+1)^3} = \int\frac{dz}{(z^2+1)^2} - \int z\,\frac{z\,dz}{(z^2+1)^3} = \int\frac{dz}{(z^2+1)^2} +$$

$$-\int z\,d\left[-\frac{1}{2.2(z^2+1)^2}\right] = \int\frac{dz}{(z^2+1)^2} + \frac{z}{4(z^2+1)^2} - \frac{1}{4}\int\frac{dz}{(z^2+1)^2} =$$

$$= \frac{z}{4(z^2+1)^2} - \frac{3}{4}\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}$$

и, слѣд., $$\int\frac{dz}{(z^2+1)^4}=\frac{z}{6(z^2+1)^3}-\frac{5z}{24(z^2+1)^2}+\frac{5}{8}\int\frac{dz}{(z^2+1)^2};$$

наконецъ, $$\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}=\int\frac{(1+z^2-z^2)\,dz}{(z^2+1)^2}=\int\frac{dz}{z^2+1}-\int z\,\frac{z\,dz}{(z^2+1)^2}=$$

$$=\int\frac{dz}{z^2+1}-\int z\,d\left[-\frac{1}{2(z^2+1)}\right]=\int\frac{dz}{z^2+1}+\frac{z}{2(z^2+1)}-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+1}=$$

$$=\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}z+C_1,$$

а потому $$\dot{I}=-\frac{4}{6(z^2+1)^3}-9\left\{\frac{z}{6(z^2+1)^3}-\frac{5z}{24(z^2+1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{5z}{16(z^2+1)}+\frac{5}{16}\operatorname{Arctg}z+C_1\right\}=-\frac{2}{3(z^2+1)^3}-\frac{3z}{2(z^2+1)^3}+\frac{15z}{8(z^2+1)^2}+$$

$$-\frac{45z}{16(z^2+1)}-\frac{45}{16}\operatorname{Arctg}z+C.$$

Прим. 2. Найти K_m въ конечномъ видѣ.

Мы имѣли выше, что

$$K_m=\frac{2m-3}{2m-2}K_{m-1}-z\,H_m;$$

слѣд., $$K_{m-1}=\frac{2m-5}{2m-4}K_{m-2}-z\,H_{m-1},$$

$$K_{m-2}=\frac{2m-7}{2m-6}K_{m-3}-z\,H_{m-2},$$

и т. д.,

а потому $$K_m=\frac{2m-3}{2m-2}\left\{\frac{2m-5}{2m-4}K_{m-2}\,zH_{m-1}\right\}-zH_m=$$

$$=\frac{(2m-3)(2m-5)}{(2m-2)(2m-4)}K_{m-2}-zH_m-\frac{2m-3}{2m-2}zH_{m-1}=$$

$$=\frac{(2m-3)(2m-5)}{(2m-2)(2m-4)}\left\{\frac{2m-7}{2m-6}K_{m-3}-zH_{m-2}\right\}-zH_m-\frac{2m-3}{2m-2}zH_{m-1}=$$

$$=\frac{(2m-3)(2m-5)(2m-7)}{(2m-2)(2m-4)(2m-6)}K_{m-3}-zH_m-\frac{2m-3}{2m-2}zH_{m-1}+$$

$$-\frac{(2m-3)(2m-5)}{(2m-2)(2m-4)}zH_{m-2}=\ldots=\frac{(2m-3)(2m-5)(2m-7)\ldots5.3.1}{(2m-2)(2m-4)(2m-6)\ldots6.4.2}K_1+$$

$$-zH_m-\frac{2m-3}{2m-2}zH_{m-1}-\frac{(2m-3)(2m-5)}{(2m-2)(2m-4)}zH_{m-2}-\ldots$$

$$-\frac{(2m-3)(2m-4)\ldots5.3}{(2m-2)(2m-4)\ldots6.4}zH_2,$$

т.-е. $$K_m = \frac{1}{2m-2}\left\{\frac{z}{(z^2+1)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-4}\frac{z}{(z^2+1)^{m-2}} + \right.$$

$$+ \frac{(2m-3)(2m-5)}{(2m-4)(2m-6)}\frac{z}{(z^2+1)^{m-3}} + \ldots + \left.\frac{(2m-3)(2m-5)\ldots 5.3}{(2m-4)(2m-6)\ldots 4.2}\frac{z}{z^2+1}\right\} +$$

$$+ \frac{(2m-3)(2m-5)\ldots 5.3.1}{(2m-2)(2m-4)\ldots 6.4.2}\operatorname{Arctg} z + C.$$

33. При интегрированіи раціональныхъ дробей не всегда слѣдуетъ начинать прямо съ разложенія ихъ на частныя — иногда выгоднѣе сначала измѣнить перемѣнную или примѣнить способъ интегрированія по частямъ.

Прим. 1.

$$\int \frac{4x^3 - 6x^2 + 2}{x^4 - 2x^3 + 2x - 3}\,dx = \int \frac{d(x^4 - 2x^3 + 2x - 3)}{x^4 - 2x^3 + 2x - 3} = l(x^4 - 2x^3 + 2x - 3) + C.$$

Прим. 2.

$$\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 5} = \int \frac{d(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2 + 4} = \frac{1}{2}\int \frac{d\frac{x^2+x+1}{2}}{1 + \left(\frac{x^2+x+1}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Arctg}\frac{x^2+x+1}{2} + C.$$

Прим. 3. $$I = \int \frac{12x^{11} - 4x^7 + 8x^3}{x^{12} + x^8 - x^4 - 1}\,dx.$$

Полагая $x^4 = y$, откуда $4x^3\,dx = dy$, получаемъ:

$$I = \int \frac{3y^2 - y + 2}{y^3 + y^2 - y - 1}\,dy = \int \frac{3y^2 - y + 2}{(y^2-1)(y+1)}\,dy = \int \frac{3y^2 - y + 2}{(y-1)(y+1)^2}\,dy =$$

$$= \int \frac{dy}{y-1} - 3\int \frac{dy}{(y+1)^2} + 2\int \frac{dy}{y+1} = l(y-1) + \frac{3}{y+1} + 2l(y+1) + C =$$

$$= \frac{3}{y+1} + l[(y-1)(y+1)^2] + C = \frac{3}{y+1} + l(y^3 + y^2 - y - 1) + C =$$

$$= \frac{3}{x^4+1} + l(x^{12} + x^8 - x^4 - 1) + C.$$

Прим. 4. $$I = \int \frac{x^9\,dx}{(4x^4-1)^3} = \frac{1}{16}\int x^6 \frac{16x^3\,dx}{(4x^4-1)^3} = \frac{1}{16}\int x^6 \frac{d(4x^4-1)}{(4x^4-1)^3} =$$

$$= \frac{1}{16}\int x^6\,d\left[-\frac{1}{2(4x^4-1)^2}\right] = \underbrace{-\frac{x^6}{32(4x^4-1)^2}}_{A} + \frac{3}{16}\int \frac{x^5\,dx}{(4x^4-1)^2} =$$

$$= A + \frac{3}{256}\int x^2 \frac{16x^3\,dx}{(4x^4-1)^2} = A + \frac{3}{256}\int x^2\, d\left[-\frac{1}{4x^4-1}\right] =$$

$$= A - \frac{3x^2}{256(4x^4-1)} + \frac{3}{128}\int \frac{x\,dx}{4x^4-1};$$

но полагая $2x^2 = y$, имѣемъ:

$$\int \frac{x\,dx}{4x^4-1} = \frac{1}{4}\int \frac{dy}{y^2-1} = \frac{1}{8}\int \frac{dy}{y-1} - \frac{1}{8}\int \frac{dy}{y+1} = \frac{1}{8}\,l\,\frac{y-1}{y+1} + C' =$$

$$= \frac{1}{8}\,l\,\frac{2x^2-1}{2x^2+1} + C',$$

а потому $$I = -\frac{20x^6 - 3x^2}{256(4x^4-1)^2} + \frac{3}{1024}\,l\,\frac{2x^2-1}{2x^2+1} + C.$$

Глава III.

Интегрированіе ирраціональныхъ функцій.

§ 1. Ирраціональныя функціи вообще.

34. Самый общій видъ ирраціональной функціи представляетъ функція y, опредѣляемая ур-ніемъ:

$$F(x, y) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

въ которомъ $F(x, y)$ — цѣлый многочленъ относительно x и y,

т.-е. $F(x, y) \equiv Xy^n + X_1 y^{n-1} + X_2 y^{n-2} + \ldots.$

$$+ X_{n-2} y^2 + X_{n-1} y + X_n \ldots\ldots\ldots (2),$$

гдѣ X, X_1, X_2, $\ldots . X_n$ зависятъ лишь отъ x и представляютъ цѣлые многочлены. Если при этомъ черезъ $f(x, y)$ обозначимъ любую *раціональную* функцію x'а и y'а, то

$$\int f(x, y)\, dx$$

(называемый **Абелевымъ** по имени знаменитаго шведскаго математика *Абеля* (Abéle), жившаго въ первой половинѣ XIX-го в.)

представляетъ самый общій видъ интеграла отъ ирраціональной функціи. *Для нахожденія такого интеграла надо введеніемъ новой независимой перемѣнной свести его на интегралъ раціональной функціи этой независимой.* Мы здѣсь разсмотримъ простѣйшіе изъ случаевъ, когда это возможно.

35. I) *Если ур-ніе (1), опредѣляющее y, линейно относительно x'*а, т.-е. имѣетъ видъ

$$\varphi(y)\,x + \psi(y) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

гдѣ φ и ψ — цѣлые многочлены, то для нахожденія $\int f(x, y)\,dx$ **надо** *y* **принять за новую независимую.**

Дѣйствительно, ур-ніе (3) даетъ: $x = -\frac{\psi(y)}{\varphi(y)}$,

откуда $$dx = -\frac{\varphi(y)\,\psi'(y) - \psi(y)\,\varphi'(y)}{\varphi^2(y)}\,dy,$$

а потому

$$\int f(x, y)\,dx = -\int f\left[-\frac{\psi(y)}{\varphi(y)},\ y\right]\frac{\varphi(y)\,\psi'(y) - \psi(y)\,\varphi'(y)}{\varphi^2(y)}\,dy = \int \Phi(y)\,dy,$$

гдѣ $\Phi(y)$ — раціональная дробь.

Прим. Найти $$\int \frac{x+y}{x-y}\,dx,$$

зная, что $$xy^2 - y^3 + x - 1 = 0.$$

Послѣднее ур-ніе даетъ: $x = \frac{y^3+1}{y^2+1}$

и, слѣд., $$dx = \frac{3y^2(y^2+1)\,dy - 2y(y^3+1)\,dy}{(y^2+1)^2} = \frac{y^4+3y^2-2y}{(y^2+1)^2}\,dy,$$

а потому

$$\int \frac{x+y}{x-y}\,dx = \int \frac{y^3+1+y(y^2+1)}{y^3+1-y(y^2+1)}\,\frac{y^4+3y^2-2y}{(y^2+1)^2}\,dy =$$

$$= \int \frac{(2y^3+y+1)(y^4+3y^2-2y)}{(y^2+1)^2(1-y)}\,dy = -\int \frac{2y^7+7y^5-3y^4+3y^3+y^2-2y}{y^5-y^4+2y^3-2y^2+y-1}\,dy =$$

$$= -\int\left\{(2y^2+2y+5) - \frac{2y^4-5y^3+11y^2-5y+5}{(y-1)(y^2+1)^2}\right\} dy = -\left(\frac{2y^3}{3}+y^2+5y\right) +$$

$$-\frac{y-1}{y^2+1} - 2\int\frac{dy}{y-1} + 4\int\frac{dy}{y^2+1} = -\left(\frac{2y^3}{3}+y^2+5y\right) - \frac{y-1}{y^2+1} +$$

$$-2l(y-1)+4\operatorname{Arctg} y + C.$$

36. **Слѣдствіе 1.** Если имѣемъ интегралъ *отъ раціональной функціи самого x и корня n'ой степени изъ дроби, числитель и знаменатель коей суть двучлены* **первой** *степени,*

т.-е. $$\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{ax+b}}\right) dx,$$

то **надо этотъ корень принять за новую перемѣнную**, т.-е. положить

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{ax+b}} = y.$$

Въ самомъ дѣлѣ, тогда:

$$\frac{\alpha x+\beta}{ax+b} = y^n, \text{ откуда } \alpha x+\beta = (ax+b)y^n$$

и, слѣд., $$(\alpha - ay^n)x + (\beta - by^n) = 0,$$

а это уравненіе есть частный случай уравненія (3).

Слѣдствіе 2. Для нахожденія интеграла *отъ раціональной функціи самого x'а и нѣсколькихъ корней* **изъ одной и той же дроби,** *числитель и знаменатель коей суть двучлены* **первой** *степени,* надо *принять за новую перемѣнную корень изъ той же дроби, показатель коего есть* **общее наименьшее кратное** *показателей данныхъ корней.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ

$$\int f(x, R_1, R_2, \ldots.)\, dx,$$

гдѣ функція f раціональна относительно x, R_1, R_2, $R_3, \ldots.$,

при чемъ $$R_1 = \sqrt[m_1]{\frac{\alpha x+\beta}{ax+b}},\ R_2 = \sqrt[m_2]{\frac{\alpha x+\beta}{ax+b}}, \ldots.$$

Обозначимъ черезъ n — наименьшее кратное показателей $m_1, m_2, m_3, \ldots$, такъ что $\frac{n}{m_1} = k_1$, $\frac{n}{m_2} = k_2$, $\frac{n}{m_3} = k_3, \ldots$,

гдѣ всѣ k — числа цѣлыя, и положимъ $\sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{ax + b}} = R$;

тогда $$\frac{\alpha x + \beta}{ax + b} = R^n$$

и, слѣд., $$R_1 = R^{k_1},\ R_2 = R^{k_2},\ R_3 = R^{k_3}, \ldots,$$

а потому

$$\int f(x, R_1, R_2, \ldots)\, dx = \int f(x, R^{k_1}, R^{k_2}, \ldots)\, dx = \int F(x, R)\, dx,$$

гдѣ функція F — раціональна относительно x и R. Отсюда и вытекаетъ данное выше правило.

Прим. 1. $$I = \int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}}.$$

Полагая $\sqrt[6]{x} = y$, имѣемъ $x = y^6$, $dx = 6y^5\, dy$

и, слѣд., $$I = 6\int \frac{y^5\, dy}{2y^4 + y^3} = 6\int \frac{y^2\, dy}{2y + 1} = 3\int \left\{y - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2y + 1}\right\} dy =$$

$$= \frac{3y^2}{2} - \frac{3y}{2} + \frac{3}{4} l(2y + 1) + C = \frac{3(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x})}{2} + \frac{3}{4} l(2\sqrt[6]{x} + 1) + C.$$

Прим. 2. $$I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(2x + 3)^3} + \sqrt[3]{(2x + 3)^2} - 2\sqrt{2x + 3}}.$$

Полагая $\sqrt[12]{2x + 3} = y$, находимъ, что $2x + 3 = y^{12}$ и $dx = 6y^{11}\, dy$,

а слѣд., $$I = 6\int \frac{y^{11}\, dy}{y^9 + y^8 - 2y^6} = 6\int \frac{y^5\, dy}{y^3 + y^2 - 2} = 6\int (y^2 - y + 1)\, dy +$$

$$+ 6\int \frac{y^2 - 2y + 2}{y^3 + y^2 - 2} dy = 2y^3 - 3y^2 + 6y + \frac{6}{5}\int \frac{dy}{y - 1} + \frac{24}{5}\int \frac{y - 2}{y^2 + 2y + 2} dy =$$

$$= 2y^3 - 3y^2 + 6y + \frac{6}{5} l(y - 1) + \frac{12}{5} l(y^2 + 2y + 2) - \frac{72}{5} \operatorname{Arctg}(y + 1) + C =$$

$$= 2\sqrt[4]{2x + 3} - 3\sqrt[6]{2x + 3} + 6\sqrt[12]{2x + 3} + \frac{6}{5} l\left[\sqrt[12]{2x + 3} - 1\right] +$$

$$+ \frac{12}{5} l\left[\sqrt[6]{2x + 3} + 2\sqrt[12]{2x + 3} + 2\right] - \frac{72}{5} \operatorname{Arctg}\left(1 + \sqrt[12]{2x + 3}\right) + C.$$

37. Слѣдствіе 3. *Интегралъ раціональной функціи самого x'a и* корня квадратнаго изъ двучлена первой степени, т.-е.

$$\int f(x, \sqrt{\alpha x + \beta})\, dx$$

найдемъ, принявъ корень за новую перемѣнную.

Частный случай. Пусть надо найти

$$\int \frac{f_n(x)}{\sqrt{\alpha x + \beta}} dx,$$

гдѣ $f_n(x)$ — цѣлый многочленъ n'ой степени. Полагая $\sqrt{\alpha x + \beta} = y$,

имѣемъ $\alpha x + \beta = y^2,\ x = \frac{y^2 - \beta}{\alpha},\ dx = \frac{2ydy}{\alpha}$

и, слѣд., $\int \frac{f_n(x)}{\sqrt{\alpha x + \beta}} dx = \int \frac{Ax^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n}{\sqrt{\alpha x + \beta}} dx =$

$$= \int \left\{ A\left(\frac{y^2-\beta}{\alpha}\right)^n + A_1\left(\frac{y^2-\beta}{\alpha}\right)^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\left(\frac{y^2-\beta}{\alpha}\right) + A_n \right\} \frac{2ydy}{\alpha y} =$$

$$= \int \{ By^{2n} + B_1 y^{2n-2} + B_2 y^{2n-4} + \ldots + B_{n-1} y^2 + B_n \}\, dy =$$

$$= B\frac{y^{2n+1}}{2n+1} + B_1 \frac{y^{2n-1}}{2n-1} + B_2 \frac{y^{2n-3}}{2n-3} + \ldots + B_{n-1}\frac{y^3}{3} + B_n y + C =$$

$$= \left\{ \frac{B}{2n+1} y^{2n} + \frac{B_1}{2n-1} y^{2n-2} + \frac{B_2}{2n-3} y^{2n-4} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{3} y^2 + B_n \right\} y + C =$$

$$= \left\{ \frac{B}{2n+1}(\alpha x+\beta)^n + \frac{B_1}{2n-1}(\alpha x+\beta)^{n-1} + \frac{B_2}{2n-3}(\alpha x+\beta)^{n-2} + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{B_{n-1}}{3}(\alpha x+\beta) + B_n \right\} \sqrt{\alpha x + \beta} + C,$$

т.-е. $$\int \frac{f_n(x)}{\sqrt{\alpha x + \beta}} dx = F_n(x)\sqrt{\alpha x + \beta} + C.$$

Такимъ образомъ, интегралъ отъ цѣлаго многочлена n'ой степени, *дѣленнаго на корень квадратный изъ двучлена* первой *степени, равенъ* цѣлому многочлену n'ой-же степени, *умноженному на тотъ же корень.*

Зная *видъ интеграла*, можемъ его найти **по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.**

Прим.

$$I=\int\frac{7x^3+2x^2-5x+11}{\sqrt{2x-5}}\,dx=(Ax^3+Bx^2+Dx+E)\sqrt{2x-5}+C.$$

Дифференцированіе этого равенства даетъ:

$$\frac{7x^3+2x^2-5x+11}{\sqrt{2x-5}}=(3Ax^2+2Bx+D)\sqrt{2x-5}+$$
$$+(Ax^3+Bx^2+Dx+E)\frac{2}{2\sqrt{2x-5}}$$

и, слѣд.,

$$7x^3+2x^2-5x+11=(3Ax^2+2Bx+D)(2x-5)+(Ax^3+Bx^2+Dx+E)=$$

$$\begin{array}{r|r|r|l} =\ 6A & x^3+\ 4B & x^2+\ 2D & x \\ & -\ 15A & -\ 10B & -\ 5D, \\ +\ A & +\ B & +\ D & +\ E, \end{array}$$

откуда $7A=7,\ -15A+5B=2,\ -10B+3D=-5,\ -5D+E=11,$

или $$A=1,\ B=\frac{17}{5},\ D=\frac{29}{3},\ E=\frac{178}{3},$$

а потому $$I=\frac{15x^3+51x^2+145x+890}{15}\sqrt{2x-5}+C.$$

38. II) *Если ур-ніе* $F(x,y)=0$ . . . . . (1)

содержитъ лишь члены m**'го и** $(m-1)$**'го порядковъ,** т.-е. имѣетъ видъ

$$\underline{\varphi_m(x,y)+\varphi_{m-1}(x,y)=0}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(4),$$

гдѣ φ_m и φ_{m-1}—цѣлые однородные многочлены m'ой и $(m-1)$'ой степени, то

$$\int f(x,\ y)\ dx$$

приведется къ интегралу раціональной дроби помощью положенія

$$\underline{y=xt.}$$

Дѣйствительно, подставляя это въ ур-ніе (4), получаемъ:

$$\varphi_m(x, xt) + \varphi_{m-1}(x, xt) = 0$$

или $$x^m \varphi_m(1, t) + x^{m-1} \varphi_{m-1}(1, t) = 0,$$

откуда $$x = -\frac{\varphi_{m-1}(1, t)}{\varphi_m(1, t)} = \varphi(t),$$

и, слѣд., $$y = t\varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)\,dt,$$

гдѣ $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ — раціональныя дроби; а потому

$$\int f(x, y)\,dx = \int f[\varphi(t), t\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \int \Phi(t)\,dt,$$

гдѣ $\Phi(t)$ — тоже раціональная дробь.

Прим. Найти $$\int \frac{x+y}{x-y}\,dx,$$

зная, что $$(y+x)^3 - (y-x)^2 = 0.$$

Полагая $y = xt$, имѣемъ: $x(t+1)^3 - (t-1)^2 = 0,$

откуда $$x = \frac{(t-1)^2}{(t+1)^3}, \quad y = \frac{t(t-1)^2}{(t+1)^3} \text{ и } dx = \frac{(t-1)(-t+5)}{(t+1)^4}\,dt,$$

а слѣд., $$\int \frac{x+y}{x-y}\,dx = \int \frac{(t-1)^2(1+t)}{(t-1)^2(1-t)} \frac{(t-1)(-t+5)}{(t+1)^4}\,dt =$$

$$= \int \frac{t-5}{(t+1)^3}\,dt = \frac{-t+2}{(t+1)^2} + C = \frac{2x^2 - xy}{(x+y)^2} + C.$$

39. III) $\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx.$

Въ предыдущихъ случаяхъ привести искомый интегралъ къ интегралу раціональной дроби удавалось благодаря тому, что оказалось возможнымъ *представить и x, и y подъ видомъ раціональныхъ функцій нѣкоторой новой перемѣнной t* (при чемъ въ первыхъ случаяхъ $t \equiv y$).

Когда подобное выраженіе x и y возможно, то говорятъ, что кривая, выражаемая ур-ніемъ $F(x, y) = 0$ (1), «уникурсальна»

(«unicursale»), при чемъ это названіе происходитъ оттого, что если $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, гдѣ φ и ψ — раціональныя дроби, то, мѣняя t отъ $-\infty$ до $+\infty$, мы получимъ всѣ точки такой кривой, и каждому значенію t отвѣчаетъ лишь одна точка. Это понятіе объ уникурсальности кривой (1) приводитъ къ нахожденію способовъ вычисленія Абелеваго интеграла

$$\int f(x, y)\, dx$$

и во многихъ другихъ случаяхъ; мы его примѣнимъ еще къ тому, при которомъ

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c},$$

такъ что ур-ніе (1) принимаетъ такой видъ

$$y^2 - ax^2 - bx - c = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

и выражаетъ, слѣд., *кривую 2'го порядка.*

40. Именно, предположимъ, во-первыхъ, что $a > 0$; тогда ур-ніе (5) выражаетъ, какъ извѣстно, гиперболу, и всякая прямая, параллельная ея ассимптотическому направленію, пересѣкаетъ ее лишь въ одной точкѣ; поэтому, если m есть угловой коэффиціентъ такого направленія, такъ что общее ур-ніе параллельныхъ ему прямыхъ будетъ

$$y = mx + t,$$

то координаты x и y любой точки кривой должны выражаться раціональными функціями числа t. И дѣйствительно, для опредѣленія m имѣемъ ур-ніе:

$$m^2 - a = 0, \text{ откуда } m = \pm\sqrt{a};$$

мы возьмемъ $m = -\sqrt{a}$ и, значитъ,

$$y = -x\sqrt{a} + t;$$

тогда ур-ніе (5) даетъ

$$(-x\sqrt{a}+t)^2-ax^2-bx-c=0$$

или $$-(2t\sqrt{a}+b)x+t^2-c=0,$$

а слѣд., $$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b},\quad y=\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}.$$

41. Пусть теперь a — какое угодно; тогда, если на такой кривой мы возьмемъ какую-либо точку (α, β), такъ что

$$\beta^2-a\alpha^2-b\alpha-c\equiv 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

то прямыя, проводимыя черезъ эту точку, пересѣкаютъ кривую еще лишь въ одной точкѣ, ибо всякая прямая пересѣкаетъ любую кривую 2'го порядка лишь въ двухъ точкахъ; отсюда слѣдуетъ, что координаты x и y этой второй точки пересѣченія, т.-е. *любой точки кривой* могутъ быть выражены раціональными функціями угловаго коэффиціента t сѣкущей. И дѣйствительно, ур-ніе этой сѣкущей будетъ:

$$y-\beta=t(x-\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7);$$

подставляя выраженіе y отсюда въ ур-ніе (5), получаемъ:

$$[t(x-\alpha)+\beta]^2-ax^2-bx-c=0$$

или $$t^2(x-\alpha)^2+2t(x-\alpha)\beta+\beta^2-ax^2-bx-c=0;$$

но (6) даетъ: $$\beta^2-c=a\alpha^2+b\alpha;$$

слѣд., $$t^2(x-\alpha)^2+2t(x-\alpha)\beta+a\alpha^2+b\alpha-ax^2-bx=0,$$

т.-е. $$t^2(x-\alpha)^2+2t(x-\alpha)\beta-a(x^2-\alpha^2)-b(x-\alpha)=0$$

или, по сокращеніи на $x-\alpha$:

$$t^2(x-\alpha)+2t\beta-a(x+\alpha)-b=0;$$

а отсюда $x = \frac{(t^2 + a)\alpha + b - 2\beta t}{t^2 - a} = \alpha + \frac{-2\beta t + 2a\alpha + b}{t^2 - a}$

и, слѣд., $y = \beta + \frac{-2\beta t^2 + (2a\alpha + b)t}{t^2 - a} = \frac{-\beta t^2 + (2a\alpha + b)t - a\beta}{t^2 - a}$,

т.-е. x и y выражаются въ t раціонально.

Если $c > 0$, то кривая (5) пересѣкается съ осью OY въ точкахъ $(0, \pm\sqrt{c})$; поэтому можемъ въ частности взять $\alpha = 0$, $\beta = -\sqrt{c}$ и тогда

$$x = \frac{2\sqrt{c}\,t + b}{t^2 - a}, \quad \underline{y = tx - \sqrt{c}.}$$

Если же $c < 0$, *но* $b^2 - 4ac > 0$, то кривая съ осью OY не пересѣкается, но зато пересѣкается съ осью OX въ точкахъ $(x_1, 0)$, при чемъ

$$ax_1^2 + bx_1 + c \equiv 0,$$

т.-е. x_1 *есть корень трехчлена* $ax^2 + bx + c$; и тогда, полагая

$$\alpha = x_1, \quad \beta = 0,$$

получаемъ: $x = x_1 + \frac{2ax_1 + b}{t^2 - a}$, $\underline{y = t(x - x_1).}$

42. Такимъ образомъ, *для приведенія интеграла*

$$\int f(x, R)\, dx,$$

въ которомъ f *— раціональная функція, а*

$$\underline{R = \sqrt{ax^2 + bx + c},}$$

къ интегралу раціональной дроби, можемъ примѣнить одну изъ трехъ слѣдующихъ, такъ называемыхъ, **подстановокъ Эйлера:**

I) . . . . . $\underline{R = -x\sqrt{a} + t,}$

II) . . . . . $\underline{R = xt - \sqrt{c},}$

III) . . . . . $\underline{R = (x - x_1)t,}$

гдѣ x_1 *есть одинъ изъ корней трехчлена* $ax^2 + bx + c$, *такъ что*

$$ax_1^2 + bx_1 + c \equiv 0.$$

Если не хотимъ вводить мнимыхъ величинъ, то первую изъ этихъ подстановокъ примѣнимъ, когда $a > 0$; *вторую — когда* $a < 0$, *но* $c > 0$; *а третью — когда* $b^2 - 4ac > 0$. Если же $a < 0$, $c < 0$ и $b^2 - 4ac < 0$, то всѣ три подстановки вводятъ мнимыя величины; но въ этомъ случаѣ такъ и должно быть, потому что трехчленъ $ax^2 + bx + c$, не имѣя вещественныхъ корней, не можетъ перемѣнить знака; а такъ какъ при $x = 0$ онъ отрицателенъ, ибо равенъ c, то, слѣд., онъ и всегда отрицателенъ, а потому радикалъ R представляетъ при всякомъ x'ѣ величину мнимую.

Прим. 1. Найти $I = \int \frac{x + \sqrt{4x^2 + 2x + 3}}{1 + 2x - 2\sqrt{4x^2 + 2x + 3}}\, dx.$

Полагая $\sqrt{4x^2 + 2x + 3} = -2x + z,$

имѣемъ $4x^2 + 2x + 3 = 4x^2 - 4zx + z^2$ или $2x + 3 = -4zx + z^2,$

откуда $x = \frac{z^2 - 3}{2(2z + 1)}$, $\sqrt{4x^2 + 2x + 3} = -\frac{z^2 - 3}{2z + 1} + z = \frac{z^2 + z + 3}{2z + 1},$

$$dx = \frac{z^2 + z + 3}{(2z + 1)^2}\, dz,$$

а потому $I = \frac{z^2 - 3 + 2(z^2 + z + 3)}{(4z + 2) + 2(z^2 - 3) - 4(z^2 + z + 3)} \cdot \frac{z^2 + z + 3}{(2z + 1)^2}\, dz =$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(3z^2 + 2z + 3)(z^2 + z + 3)}{(z^2 + 8)(2z + 1)^2}\, dz = -\frac{1}{2}\int \frac{3z^4 + 5z^3 + 14z^2 + 9z + 9}{(z^2 + 8)(2z + 1)^2}\, dz =$$

$$= -\frac{3}{8}z + \frac{11}{48(2z + 1)} + \frac{1}{36}l(2z + 1) - \frac{5}{36}l(z^2 + 8) + \frac{31\sqrt{2}}{72}\operatorname{Arctg}\frac{z}{2\sqrt{2}} + C =$$

$$= -\frac{3(2x + R)}{8} + \frac{11}{48(4x + 1 + 2R)} + \frac{1}{36}l(4x + 1 + 2R) +$$

$$- \frac{5}{36}l(8x^2 + 2x + 11 + 4xR) + \frac{31\sqrt{2}}{72}\operatorname{Arctg}\frac{2x + R}{2\sqrt{2}} + C.$$

Прим. 2. Найти $$I=\int\frac{2x+\sqrt{-x^2+x+1}}{\sqrt{-x^2+x+1}-1}\,dx.$$

Полагая $$\sqrt{-x^2+x+1}=tx-1,$$

имѣемъ: $-x^2+x+1=t^2x^2-2tx+1$ или $-x^2+x=t^2x^2-2tx$,

откуда

$$x=\frac{2t+1}{t^2+1},\quad \sqrt{-x^2+x+1}=\frac{2t+1}{t^2+1}t-1=\frac{t^2+t-1}{t^2+1},\quad dx=-\frac{2(t^2+t-1)}{(t^2+1)^2}\,dt,$$

а слѣд.,

$$I=-2\int\frac{2(2t+1)+(t^2+t-1)}{(t^2+t-1)-(t^2+1)}\,\frac{t^2+t-1}{(t^2+1)^2}\,dt=-2\int\frac{(t^2+5t+1)(t^2+t-1)}{(t^2+1)^2(t-2)}\,dt=$$

$$=-2\int\frac{t^4+6t^3+5t^2-4t-1}{(t^2+1)^2(t-2)}\,dt=\frac{5}{t^2+1}+4\int\frac{t-1}{t^2+1}\,dt-6\int\frac{dt}{t-2}=$$

$$=\frac{5}{t^2+1}+2l(t^2+1)-4\operatorname{Arctg}t-6l(t-2)+C=$$

$$=\frac{5x^2}{x^2+(R+1)^2}+2l\frac{x^2+(R+1)^2}{x^2}-4\operatorname{Arctg}\frac{R+1}{x}-6l\frac{R+1-2x}{x}+C=$$

$$=\frac{5x^2}{x+2+2R}+2l(x+2+2R)-4\operatorname{Arctg}\frac{R+1}{x}-6l(R+1-2x)+2lx+C.$$

Прим. 3. Найти $$I=\int\sqrt{-x^2+4x-3}\,dx.$$

Такъ какъ одинъ изъ корней трехчлена $-x^2+4x-3$ равенъ 3, то полагаемъ

$$\sqrt{-x^2+4x-3}=t(x-3)$$

или $$-(x-3)(x-1)=t^2(x-3)^2,\ \text{т.-е.}\ -x+1=t^2(x-3),$$

откуда

$$x=\frac{3t^2+1}{t^2+1},\quad \sqrt{-x^2+4x-3}=t\left(\frac{3t^2+1}{t^2+1}-3\right)=-\frac{2t}{t^2+1},\quad dx=\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2},$$

а слѣд.,

$$I=-8\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^3}=-\frac{t^3-t}{(t^2+1)^2}-\operatorname{Arctg}t+C=-\frac{[R^2-(x-3)^2](x-3)R}{[R^2+(x-3)^2]^2}+$$

$$-\operatorname{Arctg}\frac{R}{x-3}+C=\frac{x-2}{2}R-\operatorname{Arctg}\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}+C.$$

§ 2. Систематическое интегрированіе раціональныхъ функцій x'а и радикала $R = \sqrt{ax^2 + bx + c}$.

43. Примѣненіе одной изъ подстановокъ Эйлера непосредственно къ самому интегралу

$$\int f(x, R)\, dx$$

приводитъ обыкновенно, какъ это видно и на предыдущихъ примѣрахъ, къ черезчуръ сложнымъ раціональнымъ дробямъ; выгоднѣе предварительно разчленить заданный интегралъ на простѣйшіе, разсуждая слѣдующимъ образомъ.

Раціональную дробь $f(x, R)$ можно представить въ видѣ частнаго отъ дѣленія двухъ многочленовъ $\varphi(x, R)$ и $\psi(x, R)$, *цѣлыхъ* относительно x и R. Каждый изъ этихъ многочленовъ въ свою очередь можно разбить на двѣ части, изъ которыхъ одна содержитъ лишь *четныя* степени R, а другая — лишь *нечетныя;* и такъ какъ

$$R^{2k} = (R^2)^k = (ax^2 + b + c)^k,$$

а

$$R^{2k+1} = R^{2k} R = (ax^2 + bx + c)^k R,$$

то первую изъ этихъ частей можно представить подъ видомъ цѣлаго многочлена, содержащаго лишь x, а вторую — подъ видомъ произведенія такого многочлена на R. Такимъ образомъ, обозначая черезъ A, B, D, E, K, L, M, N — цѣлые многочлены, содержащіе лишь x, получаемъ, что

$$f(x, R) \equiv \frac{A + B R}{D + E R} \equiv \frac{(A + B R)(D - E R)}{(D + E R)(D - E R)} \equiv \frac{(AD - BE R^2) + (BD - AE) R}{D^2 - E^2 R^2} \equiv$$

$$\equiv \frac{K}{N} + \frac{L R}{N},$$

или, *переводя въ послѣднемъ членѣ радикалъ R въ знаменатель:*

$$f(x, R) \equiv \frac{K}{N} + \frac{L R^2}{N} \frac{1}{R} \equiv \frac{K}{N} + \frac{M}{N} \frac{1}{R},$$

а слѣд., $$\int f(x, R)\, dx = \int \frac{K}{N}\, dx + \int \frac{M}{N} \frac{dx}{R}.$$

Такъ какъ $\frac{K}{N}$ — раціональная функція x'а, то $\int \frac{K}{N} dx$ мы сумѣемъ найти, а слѣд. нахожденіе интеграла $\int f(x, R)\, dx$ сводится на отысканіе болѣе простаго интеграла

$$\int \frac{M}{N} \frac{dx}{R},$$

въ которомъ $\frac{M}{N}$ — *раціональная функція x'а.*

Прим.

$$I = \int \frac{2x + \sqrt{-x^2 + x + 1}}{\sqrt{-x^2 + x + 1} - 1}\, dx = \int \frac{(2x + R)(R + 1)}{(R - 1)(R + 1)}\, dx =$$

$$= \int \frac{R^2 + 2x + (2x + 1) R}{R^2 - 1}\, dx = \int \frac{-x^2 + 3x + 1 + (2x + 1) R}{-x^2 + x}\, dx =$$

$$= \int \frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 - x}\, dx + \int \frac{(2x + 1) R^2}{-x^2 + x} \frac{dx}{R} = \int \frac{x^2 - 1}{x(x - 1)}\, dx - 3 \int \frac{x dx}{x(x - 1)} +$$

$$+ \int \frac{(2x + 1)(-x^2 + x + 1)}{-x^2 + x} \frac{dx}{R} = x + lx - 3l(x - 1) + \int \frac{2x^3 - x^2 - 3x - 1}{x(x - 1)} \frac{dx}{R}.$$

44. Интегралъ $\int \frac{M}{N} \frac{dx}{R}$ въ свою очередь можно разложить на сумму болѣе простыхъ; именно, если въ разложеніи, выведенномъ въ № 25, мы соединимъ вмѣстѣ члены каждой строчки, то получимъ: $$\frac{M}{N} \equiv f_k(x) + \sum \frac{f_{m-1}(x)}{(x - \alpha)^m} + \sum \frac{f_{2n-1}(x)}{(Ax^2 + Bx + C)^n},$$

гдѣ $f_k(x)$ — цѣлая часть этой дроби, а $(x-\alpha)^m$ и $(Ax^2+Bx+C)^n$ — множители знаменателя N этой дроби въ ихъ наивысшихъ степеняхъ; а такъ какъ *интегралъ суммы равенъ суммѣ интеграловъ слагаемыхъ*, то, слѣд., для нахожденія интеграла

$$\int \frac{M}{N} \frac{dx}{R},$$

въ которомъ $\frac{M}{N}$ — раціональная функція x'а, надо лишь умѣть находить интегралы трехъ слѣдующихъ видовъ:

$$\int \frac{f_k(x)\,dx}{R}, \quad \int \frac{f_{m-1}(x)\,dx}{(x-\alpha)^m R} \quad \text{и} \quad \int \frac{f_{2n-1}(x)\,dx}{(Ax^2+Bx+C)^n R}.$$

Прим. (См. № 43) Такъ какъ

$$\frac{2x^3-x^2-3x-1}{x(x-1)} = 2x+1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x-1},$$

то $$J=\int \frac{2x^3-x^2-3x-1}{x(x-1)}\frac{dx}{R} = \int (2x+1)\frac{dx}{R} + \int \frac{dx}{xR} - 3\int \frac{dx}{(x-1)R}.$$

Полагая $$R = xt - 1$$

и, слѣд., $$x = \frac{2t+1}{t^2+1}, \quad R = \frac{t^2+t-1}{t^2+1}, \quad dx = -2\frac{t^2+t-1}{(t^2+1)^2}dt,$$

получаемъ:

$$J = -2\int \frac{t^2+4t+3}{t^2+1}\frac{dt}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{2t+1} - 6\int \frac{dt}{t^2-2t} = \frac{-2t+4}{t^2+1} +$$
$$-4\,\mathrm{Arctg}\,t - l(2t+1) + 3lt - 3l(t-2) + C =$$
$$= \frac{4x^2-2x(R+1)}{x+2+2R} - 4\,\mathrm{Arctg}\frac{R+1}{x} - l\frac{2R+2+x}{x} + 3l\frac{R+1}{x} +$$
$$-3l\frac{R+1-2x}{x} + C.$$

Соединяя этотъ результатъ съ полученнымъ въ № 43,

находимъ: $$\int \frac{2x+R}{R-1}dx = \frac{5x^2}{x+2+2R} - 4\,\mathrm{Arctg}\frac{R+1}{x} - l(2+x+2R) +$$
$$-3l(x-1) + 3l(R+1) - 3l(1-2x+R) + 2lx + C,$$

что, какъ легко повѣрить, тождественно съ результатомъ, полученнымъ въ примѣрѣ II'мъ № 42'го.

I) **45.** Изъ интеграловъ вида $\int \frac{f_k(x)\,dx}{R}$ разсмотримъ сначала простѣйшій, именно $I = \int \frac{dx}{R}$; при его нахожденіи надо различать три случая.

1) $a > 0$.

Полагая, согласно сказанному выше (№ 42):

$$R = -x\sqrt{a} + z,$$

получаемъ: $R^2 = ax^2 - 2\sqrt{a}\,zx + z^2,$

т.-е. $ax^2 + bx + c = ax^2 - 2\sqrt{a}\,zx + z^2$

или $bx + c = -2\sqrt{a}\,zx + z^2,$

откуда $bdx = -2\sqrt{a}\,zdx - 2\sqrt{a}\,xdz + 2zdz$

и, слѣд., $(b + 2\sqrt{a}\,z)\,dx = 2(-x\sqrt{a} + z)\,dz = 2Rdz;$

значитъ $\frac{dx}{R} = \frac{2dz}{2\sqrt{a}\,z + b},$

и $\int\frac{dx}{R} = \int\frac{2dz}{2\sqrt{a}\,z + b} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dz}{z + \frac{b}{2\sqrt{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,l\left(z + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right) +$

$$+ C = \frac{1}{\sqrt{a}}\,l\left(x\sqrt{a} + R + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right) + C,$$

т.-е. **при** $a > 0$**:**

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,l\left(\frac{2ax + b}{2\sqrt{a}} + R\right) + C = \frac{1}{\sqrt{a}}\,l\left[\frac{(R^2)'x}{2\sqrt{a}} + R\right] + C.$$

Прим. 1. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = l\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + C.$$

Прим. 2. Найти $$I = \int\frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 2x + 3}}.$$

Полагая $\sqrt{4x^2 - 2x + 3} = -2x + z,$ получаемъ: $4x^2 - 2x + 3 = 4x^2 - 4xz + z^2$

или $-2x + 3 = -4xz + z^2,$

откуда $-2dx = -4zdx - 4xdz + 2zdz$

и, слѣд., $(2z - 1)\,dx = (-2x + z)\,dz = \sqrt{4x^2 - 2x + 3}\,dz,$

а потому $$\frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 2x + 3}} = \frac{dz}{2z - 1}$$

и $I = \int\frac{dz}{2z - 1} = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,l\left(z - \frac{1}{2}\right) + C =$

$$= \frac{1}{2}\,l\left(2x - \frac{1}{2} + \sqrt{4x^2 - 2x + 3}\right) + C = \frac{1}{2}\,l\left(\frac{4x - 1}{2} + \sqrt{4x^2 - 2x + 3}\right) + C.$$

2) $a < 0$, но $b^2 - 4ac > 0$, т.-е. корни трехчлена $ax^2 + bx + c$ вещественны.

Самый простой изъ подобныхъ трехчленовъ есть $1 - x^2$,

при чемъ $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{Arccos} x + C;$$

поэтому попробуемъ данный трехчленъ $ax^2 + bx + c$ привести къ такому простѣйшему виду; для этого, имѣя въ виду № 30, положимъ, во-первыхъ, $b^2 - 4ac = k^2$ (число k наз. «*числомъ, указывающимъ вещественность корней*»), а во-вторыхъ,

$$(ax^2 + bx + c)'_x = kz,$$

т.-е. $$2ax + b = kz;$$

тогда $$x = \frac{kz - b}{2a};$$

$$ax^2 + bx + c = \frac{4a^2x^2 + 4abx + 4ac}{4a} = \frac{(2ax+b)^2 + 4ac - b^2}{4a} = \frac{k^2(z^2-1)}{4a}$$

и $$dx = \frac{kdz}{2a},$$

а потому $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{k}{2a}\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{k^2(z^2-1)}{4a}}} =$$

$$= -\frac{k}{-2a}\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{k^2}{-4a}(1-z^2)}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{Arccos} z + C,$$

т.-е. при $a < 0$ и $b^2 - 4ac > 0$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{Arccos}\frac{2ax+b}{k} + C = \frac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{Arccos}\frac{(R^2)'x}{k} + C.$$

Прим. 1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+1}} = \operatorname{Arccos}\frac{-2x+1}{\sqrt{5}} + C.$$

Прим. 2. Найти $I=\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2+2x+3}}$.

Здѣсь $k^2=2^2-4.(-9).3=112$;

полагая поэтому $(-9x^2+2x+3)'_x=\sqrt{112}\,z$,

имѣемъ: $-18x+2=\sqrt{112}\,z$, $x=\frac{1-\sqrt{28}\,z}{9}$, $dx=-\frac{\sqrt{28}}{9}dz$,

$$-9x^2+2x+3=\frac{-1+2\sqrt{28}\,z-28z^2}{9}+\frac{2-2\sqrt{28}\,z}{9}+3=\frac{28(1-z^2)}{9},$$

а слѣд., $$I=-\int\frac{\sqrt{28}\,dz}{9\sqrt{28\frac{1-z^2}{9}}}=\frac{1}{3}\operatorname{Arccos}z+C=\frac{1}{3}\operatorname{Arccos}\frac{-9x+1}{2\sqrt{7}}+C.$$

3) Если, наконецъ, $a<0$ и $b^2-4ac<0$, то, какъ замѣчено въ № 42'мъ, корень всегда имѣетъ мнимую величину; вслѣдствіе этого избавиться отъ мнимости въ интегралѣ нельзя, а потому интегрируемъ лишь такъ, чтобы *мнимость эту поставить на видъ;* именно, пишемъ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\int\frac{dx}{\sqrt{-ax^2-bx-c}}=$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{-a}}l\left(\frac{-2ax-b}{2\sqrt{-a}}+\sqrt{-ax^2-bx-c}\right)+C,$$

при чемъ уже $(-a)>0$ и $\sqrt{-ax^2-bx-c}$ — вещественный.

Прим. $$\int\frac{dx}{\sqrt{-9x^2+4x-1}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-4x+1}}=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{-1}}l\left(\frac{9x-2}{3}+\sqrt{9x^2-4x+1}\right)+C.$$

46. Теперь разсмотримъ интегралъ $I_n=\int\frac{x^n\,dx}{R}$; *онъ находится пониженіемъ показателя n помощью интегрированія по частямъ, съ подведеніемъ дѣлителя R подъ знакъ дифференціала.* Такъ какъ при этомъ въ числителѣ нужно имѣть множителемъ *производную подкоренного*, т.-е. двучленъ $2ax+b$, то замѣтимъ

предварительно, что

$$x^n \equiv \frac{x^{n-1}}{2a} \cdot 2ax \equiv \frac{x^{n-1}}{2a}(2ax + b - b) \equiv \frac{x^{n-1}}{2a}(2ax + b) - \frac{b}{2a}x^{n-1};$$

а слѣд.,

$$\dot{I}_n = \frac{1}{a}\int x^{n-1}\frac{(2ax+b)\,dx}{2R} - \frac{b}{2a}\int\frac{x^{n-1}\,dx}{R} =$$

$$= \frac{1}{a}\int x^{n-1}\,dR - \frac{b}{2a}\dot{I}_{n-1} = \frac{1}{a}\left[x^{n-1}R - (n-1)\int Rx^{n-2}\,dx\right] +$$

$$- \frac{b}{2a}\dot{I}_{n-1} = \frac{x^{n-1}}{a}R - \frac{n-1}{a}\int R^2 x^{n-2}\frac{dx}{R} - \frac{b}{2a}\dot{I}_{n-1} = \frac{x^{n-1}}{a}R +$$

$$- \frac{n-1}{a}\int (ax^2 + bx + c)x^{n-2}\frac{dx}{R} - \frac{b}{2a}\dot{I}_{n-1} = \frac{x^{n-1}}{a}R +$$

$$- \frac{n-1}{a}\left[a\int\frac{x^n\,dx}{R} + b\int\frac{x^{n-1}\,dx}{R} + c\int\frac{x^{n-2}\,dx}{R}\right] - \frac{b}{2a}\dot{I}_{n-1} =$$

$$= \frac{x^{n-1}}{a}R - (n-1)\dot{I}_n - \left[\frac{(n-1)b}{a} + \frac{b}{2a}\right]\dot{I}_{n-1} - \frac{(n-1)c}{a}\dot{I}_{n-2};$$

перенося членъ съ $\dot{I}_n$ изъ правой части въ лѣвую, получаемъ:

$$n\dot{I}_n = \frac{x^{n-1}}{a}R - \frac{(2n-1)b}{2a}\dot{I}_{n-1} - \frac{(n-1)c}{a}\dot{I}_{n-2},$$

откуда $$\dot{I}_n = \frac{x^{n-1}}{na}R - \frac{2n-1}{2n}\frac{b}{a}\dot{I}_{n-1} - \frac{n-1}{n}\frac{c}{a}\dot{I}_{n-2} \quad \ldots . (8).$$

Очевидно, что подобнымъ же образомъ получимъ:

$$\dot{I}_{n-1} = \frac{x^{n-2}}{(n-1)a}R - \frac{2n-3}{2(n-1)}\frac{b}{a}\dot{I}_{n-2} - \frac{n-2}{n-1}\frac{c}{a}\dot{I}_{n-3},$$

$$\dot{I}_{n-2} = \frac{x^{n-3}}{(n-2)a}R - \frac{2n-5}{2(n-2)}\frac{b}{a}\dot{I}_{n-3} - \frac{n-3}{n-2}\frac{c}{a}\dot{I}_{n-4},$$

. . . . . .

$$\dot{I}_2 = \frac{x}{2a}R - \frac{3}{2.2}\frac{b}{a}\dot{I}_1 - \frac{1}{2}\frac{c}{a}\dot{I}_0,$$

наконецъ, $$\dot{I}_1 = \frac{1}{a}R - \frac{1}{2}\frac{b}{a}\dot{I}_0$$

(въ послѣднемъ равенствѣ получаемъ лишь два члена въ правой части, такъ какъ коэффиціентъ третьяго члена равенства (8) при $n = 1$ обращается въ нуль); изъ этихъ выраженій, дѣлая послѣдовательныя подстановки, заключаемъ, что

$$I_n = \varphi_{n-1}(x)\,R + \lambda I_0,$$

т.-е.
$$\int \frac{x^n\,dx}{R} = \varphi_{n-1}(x)\,R + \lambda \int \frac{dx}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9),$$

гдѣ $\varphi_{n-1}(x)$ — цѣлый многочленъ $(n-1)$'ой степени, а λ — постоянный коэффиціентъ.

Зная **видъ интеграла**, *можемъ его опредѣлить* «**по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ**», полагая

$$\varphi_{n-1}(x) \equiv A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

дифференцируя обѣ части равенства (9), освобождаясь затѣмъ отъ знаменателя R и сравнивая, наконецъ, коэффиціенты подобныхъ членовъ въ лѣвой и правой частяхъ получаемаго такимъ путемъ равенства.

Прим. Найти $\quad I_3 = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}.$

1-й способъ.

$$I_3 = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-2x+4}} = \int x^2 \frac{2x\,dx}{2\sqrt{x^2-2x+4}} = \int x^2 \frac{(2x-2+2)\,dx}{2\sqrt{x^2-2x+4}} =$$

$$= \int x^2 \frac{(2x-2)\,dx}{2\sqrt{x^2-2x+4}} + \int \frac{x^2\,dx}{R} = \int x^2\,d\sqrt{x^2-2x+4} + \int \frac{x^2\,dx}{R} = x^2 R +$$

$$- 2\int \sqrt{x^2-2x+4}\,x\,dx + \int \frac{x^2\,dx}{R} = x^2 R - 2\int \frac{(x^2-2x+4)\,x}{R}\,dx + \int \frac{x^2\,dx}{R} =$$

$$= x^2 R - 2\int \frac{x^3\,dx}{R} + 5\int \frac{x^2\,dx}{R} - 8\int \frac{x\,dx}{R},$$

откуда
$$I_3 = \frac{x^2 R}{3} + \frac{5}{3}\int \frac{x^2\,dx}{R} - \frac{8}{3}\int \frac{x\,dx}{R};$$

затѣмъ

$$J_2=\int\frac{x^2\,dx}{R}=\int x\,\frac{(2x-2+2)\,dx}{2R}=\int x\,dR+\int\frac{x\,dx}{R}=xR-\int R\,dx+\int\frac{x\,dx}{R}=$$

$$=xR-\int(x^2-2x+4)\frac{dx}{R}+\int\frac{x\,dx}{R}=xR-\int\frac{x^2\,dx}{R}+3\int\frac{x\,dx}{R}-4\int\frac{dx}{R},$$

откуда $$J_2=\frac{xR}{2}+\frac{3}{2}\int\frac{x\,dx}{R}-2\int\frac{dx}{R},$$

такъ что $$I_3=\left(\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{6}\right)R-\frac{1}{6}\int\frac{x\,dx}{R}-\frac{10}{3}\int\frac{dx}{R};$$

наконецъ, $$\int\frac{x\,dx}{R}=\int\frac{(2x-2+2)\,dx}{2R}=\int dR+\int\frac{dx}{R}=R+\int\frac{dx}{R},$$

а слѣд.,

$$I_3=\frac{2x^2+5x-1}{6}R-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{R}=\int\frac{2x^2+5x-1}{6}R-\frac{7}{2}\,l\,(x-1+R)+C.$$

2-й способъ.

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-2x+4}}=(Ax^2+Bx+D)\sqrt{x^2-2x+4}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+4}};$$

отсюда $$\frac{x^3}{\sqrt{x^2-2x+4}}=(2Ax+B)\,R+(Ax^2+Bx+D)\,\frac{x-1}{R}+\lambda\,\frac{1}{R}$$

и, слѣд., $x^3=(2Ax+B)(x^2-2x+4)+(Ax^2+Bx+D)(x-1)+\lambda=$

$$\begin{array}{l|l|l|l|}
=2A & x^3+B & x^2-2B & x+4B \\
+A & -4A & +8A & -D \\
 & +B & +D & +\lambda \\
 & -A & -B &
\end{array},$$

а потому $3A=1$, $2B-5A=0$, $8A-3B+D=0$, $4B-D+\lambda=0$,

т.-е. $$A=\frac{1}{3},\quad B=\frac{5}{6},\quad D=-\frac{1}{6},\quad \lambda=-\frac{21}{6}=-\frac{7}{2}$$

и, значитъ, $$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-2x+4}}=\frac{2x^2+5x-1}{6}R-\frac{7}{2}\,l\,(x-1+R)+C.$$

47. Разсмотримъ, наконецъ, интегралъ

$$\int\frac{f_k(x)\,dx}{R},$$

въ которомъ $f_k(x)$ *есть цѣлый многочленъ* k*'ой степени;* полагая,

что $$f_k(x) \equiv Ax^k + A_1 x^{k-1} + \ldots + A_{k-1} x + A_k,$$

мы, на основаніи предыдущаго №-а, получаемъ

$$\int \frac{f_k(x)\,dx}{R} = \int \frac{A x^k + A_1 x^{k-1} + \ldots + A_{k-1} x + A_k}{R} dx =$$

$$= A\int \frac{x^k\,dx}{R} + A_1 \int \frac{x^{k-1}\,dx}{R} + \ldots + A_{k-1}\int \frac{x\,dx}{R} + A_k \int \frac{dx}{R} =$$

$$= A\left[\varphi_{k-1}(x)\,R + \lambda_0 \int \frac{dx}{R}\right] + A_1\left[\varphi_{k-2}(x)\,R + \lambda_1 \int \frac{dx}{R}\right] + \ldots +$$

$$+ A_{k-1}\left[\varphi_0(x)\,R + \lambda_{k-1}\int \frac{dx}{R}\right] + A_k \int \frac{dx}{R},$$

т.-е. $$\int \frac{f_k(x)\,dx}{R} = \Phi_{k-1}(x)\,R + \lambda \int \frac{dx}{R},$$

гдѣ λ — постоянный множитель, а $\Phi_{k-1}(x)$ — цѣлый многочленъ $(k-1)$'ой степени, *коэффиціенты коего, вмѣстѣ съ* λ, *опредѣлятся* «по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ».

Прим.

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}\,dx = (Ax^2 + Bx + D)\sqrt{-x^2 + x + 2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+2}}.$$

Отсюда

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{R} = (2Ax + B)\,R + (Ax^2 + Bx + D)\frac{-2x+1}{2R} + \lambda \frac{1}{R}$$

и, слѣд.,

$$2x^3 - 6x^2 + 4x - 2 = 2(2Ax + B)(-x^2 + x + 2) + (Ax^2 + Bx + D)(-2x + 1) + 2\lambda =$$

$$= \begin{array}{r|l|l|l} -4A & x^3 - 2B & x^2 + 2B & x + 4B; \\ -2A & + 4A & + 8A & + D \\ & - 2B & - 2D & + 2\lambda \\ & + A & + B & \end{array}$$

значитъ,

$$-6A = 2, \quad 5A - 4B = -6, \quad 8A + 3B - 2D = 4, \quad 4B + D + 2\lambda = -2,$$

т.-е. $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{13}{12}$, $D=-\frac{41}{24}$ и $\lambda=-\frac{37}{16}$,

а потому $\int\frac{x^3-3x^2+2x+1}{\sqrt{-x^2+x+2}}dx=\frac{-8x^2+26x-41}{24}\sqrt{-x^2+x+2}+$

$$-\frac{37}{16}\operatorname{Arccos}\frac{-2x+1}{3}+C.$$

48. Замѣчаніе. Формула (8) пониженія, выведенная въ № 46'мъ:

$$I_n=\frac{x^{n-1}}{na}R-\frac{2n-1}{2n}\frac{b}{a}I_{n-1}-\frac{n-1}{n}\frac{c}{a}I_{n-2},$$

а слѣд., и все сказанное дальше—въ №№ 46 и 47'мъ, непримѣнимы въ случаѣ $a=0$, т.-е. *когда подкоренное количество—первой степени*. Но тогда, согласно № 37, (полагая просто $R=\sqrt{bx+c}=y$), найдемъ, что $\int\frac{f_k(x)}{\sqrt{bx+c}}dx=F_k(x)\sqrt{bx+c}+C.$

II) **49.** Перейдемъ къ интегралу

$$H_m=\int\frac{f_{m-1}(x)\,dx}{(x-\alpha)^m R};$$

для нахожденія его надо положить $x-\alpha=\frac{1}{z}$ — этимъ мы преобразуемъ его въ интегралъ предъидущаго вида. Въ самомъ дѣлѣ,

тогда $x=\alpha+\frac{1}{z}$, $dx=-\frac{dz}{z^2}$

и $ax^2+bx+c=\frac{a(\alpha z+1)^2+bz(\alpha z+1)+cz^2}{z^2}=\frac{(a\alpha^2+b\alpha+c)z^2+(2a\alpha+b)z+a}{z^2}$,

такъ что, если еще положимъ

$a\alpha^2+b\alpha+c=a_1$, $2a\alpha+b=b_1$, $a=c_1$ и $\sqrt{a_1z^2+b_1z+c_1}=R_1$,

то $R=\frac{R_1}{z}$, а слѣд., $H_m=-\int\frac{f_{m-1}\left(\frac{\alpha z+1}{z}\right)}{\left(\frac{1}{z}\right)^m\frac{R_1}{z}}\frac{dz}{z^2}$;

но такъ какъ

$$f_{m-1}(x) \equiv A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

то $f_{m-1}\left(\frac{\alpha z+1}{z}\right) \equiv A_1 \frac{(\alpha z+1)^{m-1}}{z^{m-1}} + A_2 \frac{(\alpha z+1)^{m-2}}{z^{m-2}} + \ldots +$

$$+ A_{m-1} \frac{\alpha z+1}{z} + A_m \equiv \frac{\varphi_{m-1}(z)}{z^{m-1}},$$

гдѣ $\varphi_{m-1}(z)$ — цѣлый многочленъ $(m-1)$'ой степени; а потому

$$H_m = -\int \frac{\frac{\varphi_{m-1}(z)}{z^{m-1}}}{\left(\frac{1}{z}\right)^m \frac{R_1}{z}} \frac{dz}{z^2} = -\int \frac{\varphi_{m-1}(z)\,dz}{R_1}.$$

Дальше надо разсмотрѣть два случая.

1) *Если* α **не** *есть корень подрадикальнаго трехчлена* ax^2+bx+c, такъ что $a\alpha^2+b\alpha+c \neq 0$, т.-е. $a_1 \neq 0$, то трехчленъ $a_1 z^2+b_1 z+c_1$ будетъ второй степени, и тогда, на основаніи № 47-го, имѣемъ, что

$$\int \frac{\varphi_{m-1}(z)\,dz}{R_1} = \varphi_{m-2}(z) R_1 + \lambda \int \frac{dz}{R_1},$$

а слѣд., $$H_m = -\varphi_{m-2}\left(\frac{1}{x-\alpha}\right) \frac{R}{x-\alpha} - \lambda \int \frac{-z^2\,dx}{Rz},$$

т.-е. $$\int \frac{f_{m-1}(x)\,dx}{(x-\alpha)^m R} = \frac{f_{m-2}(x)}{(x-\alpha)^{m-1}} R + \lambda \int \frac{dx}{(x-\alpha) R};$$

при этомъ *коэффиціенты цѣлаго многочлена* $f_{m-2}(x)$ *и число* λ *опредѣлимъ* «**по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ**», *предварительно продифференцировавъ послѣднее равенство; затѣмъ, для нахожденія добавочнаго интеграла* $\int \frac{dx}{(x-\alpha) R}$ *положимъ, какъ сказано,*

$$x - \alpha = \frac{1}{z}.$$

2) *Если же* α **есть** *корень подрадикальнаго трехчлена* ax^2+bx+c, такъ что $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, т.-е. $a_1=0$, то трехчленъ $a_1 z^2+b_1 z+c_1$

будетъ первой степени, а потому, на основаніи №48'го, имѣемъ, что

$$\int \frac{\varphi_{m-1}(z)\,dz}{R_1} = \psi_{m-1}(z)\,R_1 + C,$$

и, слѣд., $H_m = -\psi_{m-1}(z)\,R_1 - C = -\psi_{m-1}\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)\frac{R}{x-\alpha} + C_1,$

т.-е. $$\int \frac{f_{m-1}(x)\,dx}{(x-\alpha)^m R} = \frac{\omega_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^m} R + C_1,$$

гдѣ $\omega_{m-1}(x)$—*цѣлый многочленъ, коэффиціенты котораго опредѣлимъ* «по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ».

Прим. 1. Найти $$H = \int \frac{(2x^2 - 5x + 8)\,dx}{x^3\sqrt{x^2 - 2x + 3}}.$$

Здѣсь $\alpha = 0$ и $(x^2 - 2x + 3)_{x=0} = 3 \neq 0$; поэтому полагаемъ:

$$\int \frac{2x^2 - 5x + 8}{x^3\sqrt{x^2 - 2x + 3}}\,dx = \frac{Ax + B}{x^2}\sqrt{x^2 - 2x + 3} + \lambda \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2x + 3}}.$$

Дифференцированіе этого равенства даетъ:

$$\frac{2x^2 - 5x + 8}{x^3\sqrt{x^2 - 2x + 3}} = \frac{Ax - 2(Ax + B)}{x^3}\sqrt{x^2 - 2x + 3} + \frac{Ax + B}{x^2}\cdot\frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} + \frac{\lambda}{x\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$$

и, слѣд,

$$2x^2 - 5x + 8 = (-Ax - 2B)(x^2 - 2x + 3) + (Ax + B)(x^2 - x) + \lambda x^2 =$$

$$= \begin{array}{c|c|c|c} -A & x^3 + 2A & x^2 - 3A & x \\ & -2B & +4B & -6B, \\ +A & -A & & \\ & +B & -B & \\ & +\lambda & & \end{array}$$

откуда $$\left.\begin{array}{rrr} A - B + \lambda = & 2 \\ -3A + 3B = & -5 \\ -6B = & 8 \end{array}\right| \quad B = -\frac{4}{3},\quad A = \frac{1}{3},\quad \lambda = \frac{1}{3},$$

а потому $$H = \frac{x - 4}{3x^2}\sqrt{x^2 - 2x + 3} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2x + 3}}.$$

Теперь положимъ $x = \frac{1}{z}$;

тогда $dx = -\frac{dz}{z^2}$, $x^2 - 2x + 3 = \frac{3z^2 - 2z + 1}{z^2}$,

а слѣд., $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2x + 3}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{3z^2 - 2z + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} l\left(\frac{3z - 1}{\sqrt{3}} + \right.$

$\left. + \sqrt{3z^2 - 2z + 1}\right) + C = -\frac{1}{\sqrt{3}} l\left(\frac{3 - x}{\sqrt{3}\, x} + \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{x}\right) + C$

и, значитъ, $\int \frac{2x^2 - 5x + 8}{x^3\sqrt{x^2 - 2x + 3}}\, dx = \frac{x - 4}{3x^2}\sqrt{x^2 - 2x + 3} +$

$$- \frac{\sqrt{3}}{9} l\left[\frac{3 - x}{x\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{x}\right] + C_1.$$

Прим. 2. Найти $H = \int \frac{(4x^2 + 5x + 11)\, dx}{(x + 2)^3\sqrt{x^2 + x - 2}}$.

Здѣсь $\alpha = -2$ и $(x^2 + x - 2)_{x=-2} = 0$;

поэтому полагаемъ:

$$\int \frac{(4x^2 + 5x + 11)\, dx}{(x + 2)^3\sqrt{x^2 + x - 2}} = \frac{Ax^2 + Bx + D}{(x + 2)^3}\sqrt{x^2 + x - 2} + C.$$

Дифференцированіе этого равенства даетъ:

$$\frac{4x^2 + 5x + 11}{(x + 2)^3\sqrt{x^2 + x - 2}} = \frac{(x + 2)(2Ax + B) - 3(Ax^2 + Bx + D)}{(x + 2)^4}\sqrt{x^2 + x - 2} +$$

$$+ \frac{Ax^2 + Bx + D}{(x + 2)^3} \cdot \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x - 2}}$$

и, слѣд., $8x^2 + 10x + 22 = 2[-Ax^2 + (4A - 2B)x + 2B - 3D]\frac{x^2 + x - 2}{x + 2} +$

$+ (Ax^2 + Bx + D)(2x + 1) = 2[-Ax^2 + (4A - 2B)x + 2B - 3D](x - 1) +$

$$+ (Ax^2 + Bx + D)(2x + 1) =$$

$$= \begin{array}{l|l|l|l} -2A & x^3 + (8A - 4B) & x^2 + (4B - 6D) & x \\ & + 2A & - (8A - 4B) & - (4B - 6D) \\ + 2A & + 2B & + 2D & \\ & + A & + B & + D, \end{array}$$

откуда $\begin{array}{r|r} 11A-2B=8 & \\ -8A+9B-4D=10 & 83B-44D=174 \\ -4B+7D=22 & -4B+7D=22 \end{array}$ $405B=2186;$

$$B=\frac{2186}{405},\quad D=\frac{2522}{405};\quad A=\frac{692}{405},$$

а слѣд.,

$$\int\frac{(4x^2+5x+11)\,dx}{(x+2)^3\sqrt{x^2+x-2}}=\frac{692x^2+2186x+2522}{405\,(x+2)^3}\sqrt{x^2+x-2}+C.$$

50. Въ случаѣ, когда α есть корень подрадикальнаго трехчлена ax^2+bx+c, такъ что $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$, удобно также искать интегралъ

$$\int\frac{f_{m-1}(x)\,dx}{(x-\alpha)^m R},$$

полагая $R=(x-\alpha)z$, т.-е. *примѣняя третью подстановку Эйлера.*

Дѣйствительно, тогда

$$R^2=a(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2z^2\quad\text{или}\quad a(x-\beta)=(x-\alpha)z^2,$$

т.-е.
$$ax-a\beta=z^2x-\alpha z^2,$$

откуда $x=\dfrac{\alpha z^2-a\beta}{z^2-a},\quad x-\alpha=\dfrac{a(\alpha-\beta)}{z^2-a}$ и $dx=-\dfrac{2a(\alpha-\beta)z\,dz}{(z^2-a)^2},$

такъ что
$$\frac{dx}{R}=\frac{dx}{(x-\alpha)z}=-\frac{2dz}{z^2-a},$$

а потому

$$\int\frac{f_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^m}\,\frac{dx}{R}=-2\int\left[\frac{z^2-a}{a(\alpha-\beta)}\right]^m f_{m-1}\left(\frac{\alpha z^2-a\beta}{z^2-a}\right)\frac{dz}{z^2-a}=\int\theta_{m-1}(z^2)\,dz,$$

гдѣ θ_{m-1} — цѣлый многочленъ $(m-1)$'ой степени.

Прим. Найти
$$\int\frac{4x^2+5x+11}{(x+2)^3\sqrt{x^2+x-2}}\,dx.$$

Полагая
$$R=\sqrt{x^2+x-2}=(x+2)z,$$

имѣемъ $x^2+x-2=(x+2)^2z^2$ или $x-1=(x+2)z^2,$

откуда $x=-\dfrac{2z^2+1}{z^2-1},\quad x+2=-\dfrac{3}{z^2-1},\quad R=-\dfrac{3z}{z^2-1};$

кромѣ того
$$dx=z^2\,dx+2(x+2)z\,dz,$$

или $$(z^2-1)\,dx=-2(x+2)\,zdz=\frac{6zdz}{z^2-1},$$

откуда $$dx=\frac{6zdz}{(z^2-1)^2}.$$

Поэтому

$$\int\frac{(4x^2+5x+11)\,dx}{(x+2)^3\sqrt{x^2+x-2}}=\int\frac{4\frac{(2z^2+1)^2}{(z^2-1)^2}-5\frac{2z^2+1}{z^2-1}+11}{\left(-\frac{3}{z^2-1}\right)^3\cdot\frac{-3z}{z^2-1}}\cdot\frac{6zdz}{(z^2-1)^2}=$$

$$=\frac{2}{27}\int\{4(2z^2+1)^2-5(2z^2+1)(z^2-1)+11(z^2-1)^2\}\,dz=$$

$$=\frac{2}{27}\int(17z^4-z^2+20)\,dz=\frac{2}{27}\left[\frac{17z^5}{5}-\frac{z^3}{3}+20z\right]+C=\frac{102z^4-10z^2+600}{405}z+C=$$

$$=\frac{102(x+2)^2z^4-10(x+2)^2z^2+600(x+2)^2}{405(x+2)^3}(x+2)\,z+C=$$

$$=\frac{102(x-1)^2-10(x+2)(x-1)+600(x+2)^2}{405(x+2)^3}R+C=$$

$$=\frac{692x^2+2186x+2522}{405(x+2)^3}\sqrt{x^2+x-2}+C.$$

III) **51.** Разсмотримъ, наконецъ, интегралъ

$$K_n=\int\frac{f_{2n-1}(x)\,dx}{(Ax^2+Bx+C)^n\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

въ которомъ **корни трехчлена** Ax^2+Bx+C — **мнимы**; при этомъ сначала предположимъ, что *оба трехчлена* Ax^2+Bx+C *и* ax^2+bx+c *не содержатъ членовъ 1-го измѣренія*, т.-е. что

$$B=0 \quad \text{и} \quad b=0,$$

такъ что имѣемъ дѣло съ интеграломъ

$$K'_n=\int\frac{f_{2n-1}(x)\,dx}{(Ax^2+C)^n\sqrt{ax^2+c}},$$

при чемъ A *и* C *— одного и того же знака.*

Въ такомъ случаѣ, *отдѣляя въ многочленѣ* $f_{2n-1}(x)$ *члены нечетныхъ степеней отъ членовъ четныхъ степеней*, можемъ на-

писать, что

$$f_{2n-1}(x) = \varphi_{n-1}(x^2).x + \omega_{n-1}(x^2),$$

а слѣд., $K'_n = \int \frac{\varphi_{n-1}(x^2).xdx}{(Ax^2+C)^n\sqrt{ax^2+c}} + \int \frac{\omega_{n-1}(x^2)\,dx}{(Ax^2+C)^n\sqrt{ax^2+c}}$.

Для отысканія перваго изъ двухъ послѣднихъ интегралов, въ которомъ *числитель подъинтегральной дроби содержитъ лишь* **нечетныя** *степени x'a, надо* радикалъ принять за новую перемѣнную,

т.-е. положить $\sqrt{ax^2+c} = y;$

а для отысканія второго интеграла, *содержащаго лишь* **четныя** *степени x'a,* надо производную корня принять за новую перемѣнную,

т.-е. положить $(\sqrt{ax^2+c})'_x = z;$

этими подстановками мы нахожденіе обоихъ интегралов приведемъ *къ интегрированію раціональныхъ дробей.* Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$\sqrt{ax^2+c} = y,$$

имѣемъ: $ax^2+c = y^2$, $axdx = ydy$ и $x^2 = \frac{y^2-c}{a}$,

такъ что

$$\int \frac{\varphi_{n-1}(x^2).xdx}{(Ax^2+C)^n\sqrt{ax^2+c}} = \int \frac{\varphi_{n-1}\left(\frac{y^2-c}{a}\right)\frac{ydy}{a}}{\left(A\frac{y^2-c}{a}+C\right)^n y} = \int \frac{\Phi_{n-1}(y^2)}{[Ay^2+(Ca-Ac)]^n}\,dy.$$

А полагая $(\sqrt{ax^2+c})'_x = z,$

т.-е. $\frac{ax}{\sqrt{ax^2+c}} = z$, находимъ, что $ax = z\sqrt{ax^2+c}$. . . .(10)

и $adx = z\frac{ax}{\sqrt{ax^2+c}}dx + \sqrt{ax^2+c}\,dz = z.zdx + \sqrt{ax^2+c}\,dz,$

а слѣд., $(a-z^2)\,dx = \sqrt{ax^2+c}\,dz$ и $\frac{dx}{\sqrt{ax^2+c}} = \frac{dz}{a-z^2}$;

но надо еще кромѣ того выразить x въ z'ѣ; возвышая для этого въ квадратъ равенство (10), получаемъ:

$$a^2 x^2 = z^2 (ax^2 + c) = az^2 x^2 + cz^2,$$

откуда $(a^2 - az^2) x^2 = cz^2$ и, слѣд., $x^2 = \frac{cz^2}{a(a - z^2)}$;

поэтому $$\int \frac{\omega_{n-1}(x^2)\,dx}{(Ax^2 + C)^n \sqrt{ax^2 + c}} = \int \frac{\omega_{n-1}\left[\frac{cz^2}{a(a-z^2)}\right]}{\left[A\frac{cz^2}{a(a-z^2)} + C\right]^n} \frac{dz}{a - z^2} =$$

$$= \int \frac{\Omega_{n-1}(z^2)}{[(Ac - Ca) z^2 + Ca^2]^n} dz.$$

Прим. 1.

$$K' = \int \frac{(6x - 7)\,dx}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 - 16}} = 6\int \frac{x\,dx}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 - 16}} - 7\int \frac{dx}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 - 16}}.$$

Полагая $$\sqrt{x^2 - 16} = y,$$

имѣемъ: $$x^2 - 16 = y^2, \quad x\,dx = y\,dy, \quad x^2 = y^2 + 16,$$

а слѣд., $$\int \frac{x\,dx}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 - 16}} = \int \frac{y\,dy}{(y^2 + 25)\,y} = \int \frac{dy}{y^2 + 25} = \frac{1}{25}\int \frac{dy}{\left(\frac{y}{5}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{d\,\frac{y}{5}}{\left(\frac{y}{5}\right)^2 + 1} = \frac{1}{5}\operatorname{Arctg}\frac{y}{5} + C_1 = \frac{1}{5}\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{x^2 - 16}}{5} + C_1.$$

Полагая же $$(\sqrt{x^2 - 16})'_x = z, \quad \text{т.-е.} \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}} = z,$$

имѣемъ: $$x = z\sqrt{x^2 - 16},$$

$$dx = z\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - 16}} = \sqrt{x^2 - 16}\,dz = z^2\,dx + \sqrt{x^2 - 16}\,dz,$$

откуда $$(1 - z^2)\,dx = \sqrt{x^2 - 16}\,dz, \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 16}} = \frac{dz}{1 - z^2};$$

кромѣ того $$x^2 = z^2 (x^2 - 16) = z^2 x^2 - 16z^2$$

и, слѣд., $$(1 - z^2) x^2 = -16z^2, \quad x^2 = -\frac{16z^2}{1 - z^2};$$

значитъ, $\int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2-16}} = \int \frac{dz}{\left[-\frac{16z^2}{1-z^2}+9\right](1-z^2)} = \int \frac{dz}{9-25z^2} =$

$$= -\int \frac{dz}{(5z+3)(5z-3)} = \int \frac{\frac{1}{6}\,dz}{5z+3} - \int \frac{\frac{1}{6}\,dz}{5z-3} = \frac{1}{30}\int \frac{5dz}{5z+3} +$$

$$-\frac{1}{30}\int \frac{5dz}{5z-3} = \frac{1}{30}\,l\,\frac{5z+3}{5z-3} + C_2 = \frac{1}{30}\,l\,\frac{5x+3\sqrt{x^2-16}}{5x-3\sqrt{x^2-16}} + C_2.$$

Такимъ образомъ

$$K' = \frac{6}{5}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\sqrt{x^2-16}}{5} - \frac{7}{30}\,l\,\frac{5x+3\sqrt{x^2-16}}{5x-3\sqrt{x^2-16}} + C.$$

Прим. 2.

$$\int \frac{(8x+5)\,dx}{(4x^2+5)^3\sqrt{x^2-1}} = 8\int \frac{x\,dx}{(4x^2+5)^3\sqrt{x^2-1}} + 5\int \frac{dx}{(4x^2+5)^3\sqrt{x^2-1}}.$$

Полагая $\sqrt{x^2-1} = y$, имѣемъ: $x^2 = 1+y^2$, $x\,dx = y\,dy$

и, слѣд., $\int \frac{x\,dx}{(4x^2+5)^3\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dy}{(4y^2+9)^3} = \frac{Ay^3+By}{(4y^2+9)^2} + \int \frac{D\,dy}{4y^2+9}$;

дифференцируя, получаемъ:

$$\frac{1}{(4y^2+9)^3} = \frac{(4y^2+9)(3Ay^2+B) - 16y(Ay^3+By)}{(4y^2+9)^3} + \frac{D}{4y^2+9},$$

откуда

$1 = 12A$	$y^4 + 27A$	$y^2 + 9B$
	$+ 4B$	
$-16A$	$-16B$	
$+16D$	$+72D$	$+81D$;

слѣд.,

$-4A+16D=0$	$A = 4D,$
$27A-12B+72D=0$	$B = 15D,$
$9B+81D=1$	$D = \frac{1}{216},\quad A = \frac{4}{216},\quad B = \frac{15}{216},$

а потому

$$\int \frac{dy}{(4y^2+9)^3} = \frac{4y^3+15y}{216(4y^2+9)^2} + \frac{1}{216}\int \frac{dy}{4y^2+9} = \frac{4y^3+15y}{216(4y^2+9)^2} +$$

$$+\frac{1}{1296}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{2y}{3} + C_1 = \frac{(4x^2+11)\sqrt{x^2-1}}{216(4x^2+5)^2} + \frac{1}{1296}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{2\sqrt{x^2-1}}{3} + C_1.$$

Полагая же $(\sqrt{x^2-1})'_x = z$, т.-е. $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = z$,

получаемъ

$$x = z\sqrt{x^2-1}, \quad dx = z\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2-1}\,dz = z^2\,dx + \sqrt{x^2-1}\,dz$$

и, слѣд.,
$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{dz}{1-z^2};$$

кромѣ того $x^2 = z^2(x^2-1) = z^2x^2 - z^2$, откуда $x^2 = \frac{-z^2}{1-z^2}$;

поэтому $\int \frac{dx}{(4x^2+5)^3\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dz}{\left(\frac{5-9z^2}{1-z^2}\right)^3(1-z^2)} = \int \frac{(1-z^2)^2\,dz}{(5-9z^2)^3} =$

$$= -\int \frac{(z^4-2z^2+1)\,dz}{(9z^2-5)^3} = \frac{-78z^3+50z}{675(9z^2-5)^2} - \frac{17}{675}\int \frac{dz}{9z^2-5} =$$

$$= \frac{-78z^3+50z}{675(9z^2-5)^2} + \frac{17\sqrt{5}}{20250}\,l\,\frac{3z+\sqrt{5}}{3z-\sqrt{5}} + C_2 =$$

$$= \frac{-28x^3-50x}{675(4x^2+5)^2}\sqrt{x^2-1} + \frac{17\sqrt{5}}{20250}\,l\,\frac{3x+\sqrt{5(x^2-1)}}{3x-\sqrt{5(x^2-1)}} + C_2.$$

Прим. 3.

$$\int \frac{(3x^3+5x^2+4x-11)\,dx}{(x^2+1)^2\sqrt{2x^2+5}} = \int \frac{(3x^3+4x)\,dx}{(x^2+1)^2\sqrt{2x^2+5}} + \int \frac{(5x^2-11)\,dx}{(x^2+1)^2\sqrt{2x^2+5}}.$$

Положеніе
$$\sqrt{2x^2+5} = y$$

даетъ:
$$2x^2+5 = y^2, \quad 2x\,dx = y\,dy, \quad x^2 = \frac{y^2-5}{2}$$

и, слѣд., $\int \frac{(3x^3+4x)\,dx}{(x^2+1)^2\sqrt{2x^2+5}} = \int \frac{\left(3\,\frac{y^2-5}{2}+4\right)\frac{y\,dy}{2}}{\left(\frac{y^2-5}{2}+1\right)^2 y} = \int \frac{3y^2-7}{(y^2-3)^2}\,dy =$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{9y^2-21}{(y^2-3)^2}\,dy = \frac{1}{3}\int \frac{2y^2+7(y^2-3)}{(y^2-3)^2}\,dy = \frac{1}{3}\int \frac{2y^2\,dy}{(y^2-3)^2} + \frac{7}{3}\int \frac{(y^2-3)\,dy}{(y^2-3)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\int y\,\frac{2y\,dy}{(y^2-3)^2} + \frac{7}{3}\int \frac{dy}{y^2-3} = \frac{1}{3}\int y\,d\left[-\frac{1}{y^2-3}\right] + \frac{7}{3}\int \frac{dy}{y^2-3} =$$

$$= -\frac{y}{3(y^2-3)} + \frac{8}{3}\int \frac{dy}{y^2-3} = -\frac{y}{3(y^2-3)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\,l\,\frac{y-\sqrt{3}}{y+\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2x^2+5}}{6(x^2+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\,l\,\frac{\sqrt{2x^2+5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2x^2+5}+\sqrt{3}} + C_1.$$

Положеніе же $(\sqrt{2x^2+5})'_x = z$, т.-е. $\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+5}} = z$,

даетъ:

$$2x = z\sqrt{2x^2+5}, \quad 2dx = z\frac{2xdx}{\sqrt{2x^2+5}} + \sqrt{2x^2+5}\,dz = z^2\,dx + \sqrt{2x^2+5}\,dz,$$

откуда $(2-z^2)\,dx = \sqrt{2x^2+5}\,dz$, $\dfrac{dx}{\sqrt{2x^2+5}} = \dfrac{dz}{2-z^2}$;

кромѣ того $4x^2 = z^2(2x^2+5) = 2z^2x^2 + 5z^2$ и, слѣд., $x^2 = \dfrac{5z^2}{4-2z^2}$;

поэтому

$$\int \frac{(5x^2-11)\,dx}{(x^2+1)^2\sqrt{2x^2+5}} = \int \frac{\left(\frac{25z^2}{4-2z^2} - 11\right)dz}{\left[\frac{5z^2}{4-2z^2}+1\right]^2(2-z^2)} = 2\int \frac{(47z^2-44)\,dz}{(3z^2+4)^2} =$$

$$= 2\int \frac{80z^2 - 11(3z^2+4)}{(3z^2+4)^2}\,dz = 2\int \frac{80z^2\,dz}{(3z^2+4)^2} - 2\int \frac{11(3z^2+4)}{(3z^2+4)^2}\,dz =$$

$$= \frac{80}{3}\int z\,d\left[-\frac{1}{3z^2+4}\right] - 22\int \frac{dz}{3z^2+4} = -\frac{80z}{3(3z^2+4)} + \frac{14}{3}\int \frac{dz}{3z^2+4} =$$

$$= -\frac{80z}{3(3z^2+4)} + \frac{7}{3\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\frac{z\sqrt{3}}{2} + C_2 = -\frac{8x\sqrt{2x^2+5}}{3(x^2+1)} +$$

$$+ \frac{7}{3\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2x^2+5}} + C_2.$$

52. Вернемся теперь къ интегралу

$$\int \frac{f_{2n-1}(x)\,dx}{(Ax^2+Bx+C)^n\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

въ которомъ B *и* b *не равны сразу нулю*, и покажемъ, что помощью измѣненія перемѣнной можно всегда *уничтожить среднія слагаемыя* въ обоихъ трехчленахъ.

При этомъ различимъ два случая.

1) *Первыя пары коэффиціентовъ въ трехчленахъ не пропорціональны*, т.-е.

$$\frac{A}{a} \neq \frac{B}{b}.$$

Въ такомъ случаѣ положимъ $x = \frac{kz + m}{z + 1}$,

опредѣляя числа k и m какъ разъ изъ условія, чтобы по подстановкѣ этого выраженія среднія слагаемыя въ обоихъ трехчленахъ исчезли. Дѣлая такую подстановку, получаемъ:

$$ax^2 + bx + c = a\frac{(kz+m)^2}{(z+1)^2} + b\frac{kz+m}{z+1} + c = \frac{a(kz+m)^2 + b(kz+m)(z+1) + c(z+1)^2}{(z+1)^2} =$$

$$= \frac{(ak^2 + bk + c)z^2 + [2akm + b(k+m) + 2c]z + am^2 + bm + c}{(z+1)^2}$$

и точно такъ же

$$Ax^2 + Bx + C = \frac{(Ak^2 + Bk + C)z^2 + [2Akm + B(k+m) + 2C]z + Am^2 + Bm + C}{(z+1)^2};$$

слѣд., k и m опредѣляются уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} 2a(km) + b(k+m) + 2c &= 0 \\ 2A(km) + B(k+m) + 2C &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (11);$$

и такъ какъ по условію коэффиціенты A и B, a и b не пропорціональны, то эти ур-нія дадутъ для $k + m$ и km конечныя и вполнѣ опредѣленныя значенія — напр., ξ и η, послѣ чего сами k и m опредѣлятся, какъ извѣстно, изъ квадратнаго ур-нія

$$t^2 - \xi t + \eta = 0.$$

Легко видѣть, что числа k и m окажутся всегда вещественными. Дѣйствительно, рѣшая ур-нія (11), получаемъ:

$$km = \frac{bC - cB}{aB - bA}, \quad k + m = \frac{2(cA - aC)}{aB - bA},$$

такъ что k и m суть корни ур-нія

$$t^2 - 2\frac{cA - aC}{aB - bA}t + \frac{bC - cB}{aB - bA} = 0,$$

которое даетъ:

$$t = \frac{cA - aC \pm \sqrt{Q}}{aB - bA}, \quad \text{гдѣ} \quad Q = (cA - aC)^2 - (bC - cB)(aB - bA).$$

Но если корни трехчлена $ax^2 + bx + c$ обозначимъ черезъ α и β, то

$$\frac{b}{a} = -(\alpha + \beta) \quad \text{и} \quad \frac{c}{a} = \alpha\beta,$$

откуда $$b = -a(\alpha + \beta), \qquad c = a\alpha\beta,$$

а слѣд., $Q = a^2\{(A\alpha\beta - C)^2 + [C(\alpha + \beta) + B\alpha\beta][B + A(\alpha + \beta)]\} =$

$$= a^2\{A^2\alpha^2\beta^2 - 2AC\alpha\beta + C^2 + BC\alpha + BC\beta + B^2\alpha\beta + AC\alpha^2 + AC\beta^2 +$$

$$+ 2AC\alpha\beta + AB\alpha^2\beta + AB\alpha\beta^2\} = a^2(A\alpha^2 + B\alpha + C)(A\beta^2 + B\beta + C).$$

Когда α и β — вещественны, то $Q > 0$ потому, что $A\alpha^2 + B\alpha + C$ и $A\beta^2 + B\beta + C$ имѣютъ одинаковый знакъ, ибо корни трехчлена $Ax^2 + Bx + C$, по условію, мнимы и, слѣд., онъ сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ при всякомъ вещественномъ x'ѣ; когда же α и β — мнимы и, конечно, сопряженны, то то же будетъ и съ $A\alpha^2 + B\alpha + C$ и $A\beta^2 + B\beta + C$, такъ что если

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = P + Si, \quad \text{то} \quad A\beta^2 + B\beta + C = P - Si,$$

а слѣд., $$(A\alpha^2 + B\alpha + C)(A\beta^2 + B\beta + C) = P^2 + S^2,$$

т.-е. опять $Q > 0$. Это и показываетъ, что корни k и m ур-нія $t^2 - \xi t + \eta = 0$ всегда вещественны.

Найдя коэффиціенты k и m, будемъ имѣть, что

$$ax^2 + bx + c = \frac{(ak^2 + bk + c)z^2 + (am^2 + bm + c)}{(z+1)^2} = \frac{a_1 z^2 + c_1}{(z+1)^2}$$

и $$Ax^2 + Bx + C = \frac{(Ak^2 + Bk + C)z^2 + (Am^2 + Bm + C)}{(z+1)^2} = \frac{A_1 z^2 + C_1}{(z+1)^2};$$

кромѣ того $$dx = \frac{(z+1)kdz - (kz + m)dz}{(z+1)^2} = \frac{(k-m)dz}{(z+1)^2},$$

а слѣд., $$\int \frac{f_{2n-1}(x)\,dx}{(Ax^2 + Bx + C)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}} =$$

$$= \int \frac{f_{2n-1}\left(\frac{kz+m}{z+1}\right)}{\left[\frac{A_1 z^2 + C_1}{(z+1)^2}\right]^n \sqrt{\frac{a_1 z^2 + c_1}{(z+1)^2}}} \frac{k-m}{(z+1)^2}\,dz = \int \frac{F_{2n-1}(z)\,dz}{(A_1 z^2 + C_1)^n \sqrt{a_1 z^2 + c_1}}.$$

Прим. Для интеграла $K = \int \frac{(2x^3 + 3)\,dx}{(x^2 - x + 1)^2 \sqrt{x^2 + x + 1}}$,

полагая $$x = \frac{kz + m}{z + 1},$$

имѣемъ: $x^2+x+1=\dfrac{(k^2+k+1)z^2+[2km+(k+m)+2]z+m^2+m+1}{(z+1)^2}$,

$$x^2-x+1=\frac{(k^2-k+1)z^2+[2km-(k+m)+2]z+m^2-m+1}{(z+1)^2};$$

слѣд., $2km+(k+m)+2=0$ и $2km-(k+m)+2=0$,

откуда $k+m=0,\quad km=-1,$

такъ что k и m суть корни ур-нія $t^2-1=0$, т.-е., напр., $k=1,\ m=-1$.

Поэтому

$$x=\frac{z-1}{z+1},\quad dx=\frac{2dz}{(z+1)^2},\quad x^2+x+1=\frac{3z^2+1}{(z+1)^2},\quad x^2-x+1=\frac{z^2+3}{(z+1)^2},$$

а слѣд., $K=\displaystyle\int\frac{2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+3}{\left[\frac{z^2+3}{(z+1)^2}\right]^2\sqrt{\frac{3z^2+1}{(z+1)^2}}}\,\frac{2dz}{(z+1)^2}=$

$$=\int\frac{2(z-1)^3+3(z+1)^3}{(z^2+3)^2\sqrt{3z^2+1}}\,dz=\int\frac{(5z^3+15z)\,dz}{(z^2+3)^2\sqrt{3z^2+1}}+\int\frac{(3z^2+1)\,dz}{(z^2+3)^2\sqrt{3z^2+1}}=$$

$$=\int\frac{5zdz}{(z^2+3)\sqrt{3z^2+1}}+\int\frac{(3z^2+1)\,dz}{(z^2+3)^2\sqrt{3z^2+1}}.$$

Полагая $\sqrt{3z^2+1}=u,$

имѣемъ: $3z^2=u^2-1,\quad z^2=\dfrac{u^2-1}{3},\quad zdz=\dfrac{udu}{3}$

и. слѣд., $\displaystyle\int\frac{5zdz}{(z^2+3)\sqrt{3z^2+1}}=5\int\frac{du}{u^2+8}=\frac{5}{\sqrt{8}}\operatorname{Arctg}\frac{u}{\sqrt{8}}+C_1.$

Полагая же $(\sqrt{3z^2+1})'_z=v,$ т.-е. $\dfrac{3z}{\sqrt{3z^2+1}}=v,$

находимъ: $3z=v\sqrt{3z^2+1},\quad 3dz=v^2\,dz+\sqrt{3z^2-1}\,dv,$

откуда $(3-v^2)\,dz=\sqrt{3z^2-1}\,dv;$

кромѣ того $9z^2=v^2(3z^2+1)=3v^2z^2+v^2$ и, слѣд., $z^2=\dfrac{v^2}{9-3v^2},$

а потому $\displaystyle\int\frac{(3z^2+1)\,dz}{(z^2+3)^2\sqrt{3z^2+1}}=\int\frac{\frac{3v^2}{9-3v^2}+1}{\left[\frac{v^2}{9-3v^2}+3\right]^2}\,\frac{dv}{3-v^2}=$

$$= \int \frac{27dv}{(27-8v^2)^2} = \int \frac{27-8v^2+8v^2}{(27-8v^2)^2}\,dv = \int \frac{dv}{27-8v^2} + \int \frac{8v^2\,dv}{(27-8v^2)^2} =$$

$$= -\int \frac{dv}{8v^2-27} + \frac{1}{2}\int v d\left[-\frac{1}{8v^2-27}\right] = -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{8v^2-27} - \frac{v}{2(8v^2-27)} =$$

$$= -\frac{v}{2(8v^2-27)} - \frac{1}{24\sqrt{6}}\, l\,\frac{\sqrt{8}\,v-\sqrt{27}}{\sqrt{8}\,v+\sqrt{27}} + C_2.$$

Такимъ образомъ $K = \frac{5}{\sqrt{8}}\operatorname{Arctg}\sqrt{\frac{3z^2+1}{8}} + \frac{z\sqrt{3z^2+1}}{6(z^2+3)} +$

$$+ \frac{1}{24\sqrt{6}}\, l\,\frac{\sqrt{8}\,z+\sqrt{3}\,\sqrt{3z^2+1}}{\sqrt{8}\,z-\sqrt{3}\,\sqrt{3z^2+1}} + C = \frac{5}{\sqrt{8}}\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(1-x)\sqrt{2}} +$$

$$+ \frac{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}{12(x^2-x+1)} + \frac{1}{24\sqrt{6}}\, l\,\frac{(x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x+1)}}{(x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x+1)}} + C.$$

53. 2) *Если первыя пары коэффиціентовъ въ трехчленахъ* Ax^2+Bx+C и ax^2+bx+c *пропорціональны*, т.-е.

если $$\frac{A}{a} = \frac{B}{b},$$

то ур-нія (11) дадутъ для km и $k+m$ безконечныя значенія; но тогда производныя этихъ трехчленовъ отличаются другъ отъ друга лишь постояннымъ множителемъ, а слѣд. (см. № 30), среднія слагаемыя изчезнутъ въ обоихъ трехчленахъ одновременно, если **производную одного изъ этихъ трехчленовъ принять за новую перемѣнную.**

Прим. Найти $K = \int \frac{(4x+5)\,dx}{(2x^2-2x+3)^2\sqrt{4x^2-4x-3}}$.

Полагая $(4x^2-4x-3)'_x = 8y$, т.-е. $8x-4 = 8y$,

имѣемъ:

$$x = \frac{1+2y}{2},\ dx = dy,\ 4x^2-4x-3 = 1+4y+4y^2-2-4y-3 = 4(y^2-1)$$

и $$2x^2-2x+3 = \frac{1+4y+4y^2-2-4y+6}{2} = \frac{4y^2+5}{2},$$

а слѣд.,

$$K=\int\frac{(4y+7)\,dy}{\left(\frac{4y^2+5}{2}\right)^2\sqrt{4(y^2-1)}}=8\int\frac{y\,dy}{(4y^2+5)^2\sqrt{y^2-1}}+14\int\frac{dy}{(4y^2+5)\sqrt{y^2-1}}.$$

Полагая $\sqrt{y^2-1}=z$ и, слѣд., $y^2=1+z^2$, $y\,dy=z\,dz$,

имѣемъ: $8\int\frac{y\,dy}{(4y^2+5)^2\sqrt{y^2-1}}=8\int\frac{dz}{(4z^2+9)^2}=\frac{4z}{9(4z^2+9)}+\frac{2}{27}\operatorname{Arctg}\frac{2z}{3}+C_1=$

$$=\frac{4\sqrt{y^2-1}}{9(4y^2+5)}+\frac{2}{27}\operatorname{Arctg}\frac{2\sqrt{y^2-1}}{3}+C_1;$$

полагая же $(\sqrt{y^2-1})'_y=v$, т.-е. $\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}=v$,

получаемъ: $$\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\frac{dv}{1-v^2};$$

затѣмъ $y^2=v^2y^2-v^2$, откуда $y^2=\frac{-v^2}{1-v^2}$,

и потому $14\int\frac{dy}{(4y^2+5)^2\sqrt{y^2-1}}=14\int\frac{dv}{\left(\frac{5-9v^2}{1-v^2}\right)^2(1-v^2)}=$

$$=-14\int\frac{(v^2-1)\,dv}{(9v^2-5)^2}=-\frac{28v}{45(9v^2-5)}-\frac{98}{45}\int\frac{dv}{9v^2-5}=-\frac{28v}{45(9v^2-5)}+$$

$$-\frac{49\sqrt{5}}{675}\,l\,\frac{3v-\sqrt{5}}{3v+\sqrt{5}}+C_2=-\frac{28y\sqrt{y^2-1}}{45(4y^2+5)}+\frac{49\sqrt{5}}{675}\,l\,\frac{3y+\sqrt{5(y^2-1)}}{3y-\sqrt{5(y^2-1)}}+C_2;$$

а слѣд.,

$$K=\frac{20-28y}{45(4y^2+5)}\sqrt{y^2-1}+\frac{2}{27}\operatorname{Arctg}\frac{2\sqrt{y^2-1}}{3}+\frac{49\sqrt{5}}{675}\,l\,\frac{3y+\sqrt{5(y^2-1)}}{3y-\sqrt{5(y^2-1)}}+C=$$

$$=\frac{17-14x}{90(2x^2-2x+3)}\sqrt{4x^2-4x-3}+\frac{2}{27}\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{4x^2-4x-3}}{3}+$$

$$+\frac{49\sqrt{5}}{675}\,l\,\frac{6x-3+\sqrt{5(4x^2-4x-3)}}{6x-3-\sqrt{5(4x^2-4x-3)}}+C.$$

54. Для большей ясности резюмируемъ все, изложенное выше по поводу нахожденія интеграла

$$\int f(x,R)\,dx,$$

въ которомъ $$R=\sqrt{ax^2+bx+c}.$$

1) Прежде всего *отдѣляемъ* (№ 43) *раціональную часть отъ ирраціональной* въ функціи $f(x, R)$, приводя ее къ виду

$$\frac{K}{N} + \frac{M}{N}\,\frac{1}{R},$$

гдѣ $\frac{K}{N}$ и $\frac{M}{N}$ — *раціональныя дроби*, такъ что

$$\int f(x, R)\,dx = \int \frac{K}{N}\,dx + \int \frac{M}{N}\,\frac{dx}{R}.$$

2) Ищемъ $\int \frac{K}{N}\,dx$ по правиламъ, изложеннымъ въ гл. II.

3) Изъ дроби $\frac{M}{N}$ дѣленіемъ *выдѣляемъ цѣлую часть* $f_k(x)$, такъ что

$$\frac{M}{N} = f_k(x) + \frac{P}{N},$$

при чемъ $\frac{P}{N}$ — *правильная* раціональная дробь.

Тогда $$\int \frac{M}{N}\,\frac{dx}{R} = \int f_k(x)\,\frac{dx}{R} + \int \frac{P}{N}\,\frac{dx}{R}.$$

4) Интегралъ $\int f_k(x)\,\frac{dx}{R}$ ищемъ по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, полагая

$$\int f_k(x)\,\frac{dx}{R} = f_{k-1}(x)\,R + \lambda \int \frac{dx}{R}$$

и помня, что $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,l\left[\frac{(R^2)'_x}{2\sqrt{a}} + R\right] + C$ при $a > 0$

и $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\,\mathrm{Arccos}\,\frac{(R^2)'_x}{\sqrt{b^2-4ac}}$ при $a < 0$, но $b^2 - 4ac > 0$.

5) Разлагаемъ знаменатель N на вещественные множители 1-й и 2-й степени, и если, напр., окажется

$$N = (x-\alpha)^m\,(x-\beta)^n \ldots (Ax^2+Bx+C)^p\,(Ex^2+Fx+G)^q \ldots,$$

то представляемъ дробь $\frac{P}{N}$ подъ видомъ слѣдующей суммы:

$$\frac{f_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^m}+\frac{f_{n-1}(x)}{(x-\beta)^n}+\ldots.+\frac{f_{2p-1}(x)}{(Ax^2+Bx+C)^p}+\frac{f_{2q-1}(x)}{(Ex^2+Fx+G)^q}+\ldots,$$

гдѣ $f_{m-1}(x)$, $f_{n-1}(x)$,. . . . суть цѣлые многочлены $(m-1)$'ой, $(n-1)$'ой и т. д. степеней, коэффиціенты коихъ опредѣлимъ по «способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ». (Возможность такого разложенія была доказана въ № 17). Тогда

$$\int\frac{P}{N}\frac{dx}{R}=\int\frac{f_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^m}\frac{dx}{R}+\int\frac{f_{n-1}(x)}{(x-\beta)^n}\frac{dx}{R}+\ldots.+\int\frac{f_{2q-1}(x)}{(Ax^2+Bx+C)^p}\frac{dx}{R}+\ldots.$$

6) Интегралъ $\int\frac{f_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^m}\frac{dx}{R}$ ищемъ *по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ*, зная, что, **если α обращаетъ трехчленъ R^2 въ нуль**, *то*

$$\int\frac{f_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^m}\frac{dx}{R}=\frac{\varphi_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^m}R+C,$$

а **если α не есть корень трехчлена R^2**, *то*

$$\int\frac{f_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^m}\frac{dx}{R}=\frac{f_{m-2}(x)}{(x-\alpha)^{m-1}}R+\lambda\int\frac{dx}{(x-\alpha)R},$$

при чемъ интегралъ $\int\frac{dx}{(x-\alpha)R}$ найдемъ, полагая $x-\alpha=\frac{1}{z}$.

Также поступаемъ для отысканія $\int\frac{f_{n-1}(x)}{(x-\beta)^n}\frac{dx}{R}$, и т. д.

7) Наконецъ, для нахожденія интеграла

$$\int\frac{f_{2p-1}(x)}{(Ax^2+Bx+C)^p}\frac{dx}{R}$$

сначала уничтожаемъ въ Ax^2+Bx+C и ax^2+bx+c члены 1'го измѣренія, полагая

$$x=\frac{kz+m}{z+1}\text{ при }\frac{A}{a}=\frac{B}{b},$$

и $$(ax^2 + bx + c)'_x = az \text{ при } \frac{A}{a} = \frac{B}{b};$$

а затѣмъ *отдѣляемъ въ подъинтегральной функціи нечетную часть отъ четной, и для интегрированія первой полагаемъ* $R = u$, *а для интегрированія второй полагаемъ* $R'_z = v$.

55. Если не дѣлать различія между вещественными и мнимыми корнями знаменателя N выдѣленной выше *правильной* дроби $\frac{P}{N}$ и представить его поэтому въ видѣ произведенія

$$K(x-\alpha)^m (x-\beta)^n (x-\gamma)^p \ldots (x-\lambda)^s,$$

то дробь $\frac{P}{N}$ можемъ разложить такъ:

$$\frac{P}{N} = \frac{f_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^m} + \frac{f_{n-1}(x)}{(x-\beta)^n} + \frac{f_{p-1}(x)}{(x-\gamma)^p} + \ldots + \frac{f_{s-1}(x)}{(x-\lambda)^s},$$

а потому

$$\int \frac{P}{N}\frac{dx}{R} = \int \frac{f_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^m}\frac{dx}{R} + \int \frac{f_{n-1}(x)}{(x-\beta)^n}\frac{dx}{R} + \int \frac{f_{p-1}(x)}{(x-\gamma)^p}\frac{dx}{R} + \ldots + \int \frac{f_{s-1}(x)}{(x-\lambda)^s}\frac{dx}{R}.$$

Два изъ корней знаменателя N могутъ быть и корнями трехчлена R^2 — предположимъ, что это будутъ α и β; тогда $\gamma, \ldots \lambda$ ужѣ не будутъ корнями для R^2, а слѣд.,

$$\int \frac{P}{N}\frac{dx}{R} = \frac{\varphi_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^m}R + \frac{\varphi_{n-1}(x)}{(x-\beta)^n}R + \left\{\frac{\varphi_{p-2}(x)}{(x-\gamma)^{p-1}}R + \int \frac{c\,dx}{(x-\gamma)R}\right\} + \ldots +$$

$$+ \left\{\frac{\varphi_{s-2}(x)}{(x-\lambda)^{s-1}}R + \int \frac{l\,dx}{(x-\lambda)R}\right\},$$

гдѣ $\varphi_{m-1}(x)$, $\varphi_{n-1}(x), \ldots$ цѣлые многочлены $(m-1)$'ой, $(n-1)$'ой и т. д степеней, а $c, \ldots l$ — постоянныя чи́сла. Соединяя теперь всѣ раціональныя дроби правой части въ одну, а всѣ интегралы — тоже въ одинъ, получаемъ:

$$\int \frac{P}{N}\frac{dx}{R} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + \int \frac{\theta(x)}{\omega(x)}\frac{dx}{R},$$

гдѣ $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\theta(x)$ и $\omega(x)$–цѣлые многочлены и дроби $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ и $\frac{\theta(x)}{\omega(x)}$ — правильныя.

При этомъ

$$\psi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\{(x-\alpha)^{m-1}(x-\beta)^{n-1}(x-\gamma)^{p-1}\ldots(x-\lambda)^{s-1}\}$$

и $$\omega(x) = (x-\gamma)\ldots(x-\wedge);$$

поэтому, если положимъ

$$D = (x-\alpha)^{m-1}(x-\beta)^{n-1}(x-\gamma)^{p-1}\ldots.(x-\lambda)^{s-1},$$

при чемъ, какъ извѣстно, это D есть общій наибольшій дѣлитель между знаменателемъ N данной подъинтегральной дроби и его производною), *а черезъ* D_1 *обозначимъ общій наибольшій дѣлитель между тѣмъ же знаменателемъ* N *и подкореннымъ количествомъ* R^2, то

$$\psi(x) = DD_1 \quad \text{и} \quad \omega(x) = \frac{N}{DD_1}.$$

Предполагая, наконецъ, что

$$\omega(x) = (x-\gamma).\ldots.(x-\varepsilon)(Ax^2+Bx+C)(Ex^2+Fx+G).\ldots,$$

и разлагая дробь $\frac{\theta(x)}{\omega(x)}$ на простѣйшія, получаемъ окончательно:

$$\int \frac{P}{N}\frac{dx}{R} = \frac{\varphi(x)}{DD_1}R + c\int\frac{dx}{(x-\gamma)R} + \ldots. +$$

$$+ e\int\frac{dx}{(x-\varepsilon)R} + \int\frac{ax+b}{Ax^2+Bx+C}\frac{dx}{R} + \int\frac{ex+f}{Ex^2+Fx+G}\frac{dx}{R} + \ldots.$$

56. Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ интегралъ $\int f(x, R)\,dx$ удобнѣе искать не по общимъ, изложеннымъ выше, способамъ, а примѣняя какіе-либо спеціальные пріемы. Изъ такихъ случаевъ отмѣтимъ два.

I) Интегралъ $\int R^n\,dx$ легко найдемъ, примѣняя интегрированіе по частямъ:

$$\int R^n\,dx = xR^n - n\int xR^{n-1}\,dR = xR^n - \frac{n}{2}\int xR^{n-2}(2ax+b)\,dx =$$

$$= xR^n - \frac{n}{2}\int R^{n-2}(2ax^2+bx+bx+2c-bx-2c) = xR^n +$$

$$- n\int R^{n-2}(ax^2+bx+c)\,dx + \frac{n}{2}\int R^{n-2}(bx+2c)\,dx =$$

$$= xR^n - n\int R^n\,dx + \frac{nb}{2}\int R^{n-2}x\,dx + nc\int R^{n-2}\,dx;$$

слѣд., $(n+1)\int R^n\,dx = xR^n + \frac{nb}{4a}\int R^{n-2}(2ax+b-b)\,dx + nc\int R^{n-2}\,dx =$

$$= xR^n + \frac{nb}{4a}\int R^{n-2}\,d(R^2) + \frac{n(4ac-b^2)}{4a}\int R^{n-2}\,dx =$$

$$= xR^n + \frac{nb}{2a}\int R^{n-1}\,dR + \frac{n(4ac-b^2)}{4a}\int R^{n-2}\,dx,$$

а потому $$\int R^n\,dx = \frac{2ax+b}{2(n+1)a}R^n + \frac{n}{n+1}\,\frac{4ac-b^2}{4a}\int R^{n-2}\,dx.$$

Прим.

$$\int (\sqrt{x^2+2x-1})^5\,dx = xR^5 - 5\int xR^3(x+1)\,dx = xR^5 - 5\int R^3(x^2+x)\,dx =$$

$$= xR^5 - 5\int R^5\,dx + 5\int R^3(x-1)\,dx = xR^5 - 5\int R^5\,dx + \frac{5}{2}\int R^3(2x+2-4)\,dx =$$

$$= xR^5 - 5\int R^5\,dx + \frac{5}{2}\int R^3\,d(x^2+2x-1) - 10\int R^3\,dx = xR^5 - 5\int R^5\,dx +$$

$$+ 5\int R^4\,dR - 10\int R^3\,dx;$$

слѣд.,
$$6\int R^5\,dx = xR^5 + R^5 - 10\int R^3\,dx$$

и
$$\int R^5\,dx = \frac{x+1}{6}R^5 - \frac{5}{3}\int R^3\,dx.$$

Далѣе

$$\int R^3\,dx = xR^3 - 3\int xR(x+1)\,dx = xR^3 - 3\int R(x^2+2x-1-x+1)\,dx =$$

$$= xR^3 - 3\int R^3\,dx + 3\int R(x-1)\,dx = xR^3 - 3\int R^3\,dx + \frac{3}{2}\int R(2x+2-4)\,dx =$$

$$= xR^3 - 3\int R^3\,dx + \frac{3}{2}\int Rd(R^2) - 6\int Rdx = xR^3 - 3\int R^3\,dx + 3\int R^2\,dR - 6\int Rdx,$$

такъ что
$$4\int R^3\,dx = xR^3 + R^3 - 6\int Rdx,$$

откуда
$$\int R^3\,dx = \frac{x+1}{4}R^3 - \frac{3}{2}\int Rdx,$$

а слѣд.,
$$\int R^5\,dx = \frac{x+1}{6}R^5 - \frac{5(x+1)}{12}R^3 + \frac{5}{2}\int Rdx.$$

Наконецъ,

$$\int Rdx = xR - \int x\frac{(x+1)\,dx}{R} = xR - \int \frac{x^2+2x-1-x+1}{R}\,dx =$$

$$= xR - \int Rdx + \int \frac{(x-1)\,dx}{R} = xR - \int Rdx + \int \frac{2x+2-4}{2R}\,dx =$$

$$= xR - \int Rdx + \int \frac{d(R^2)}{2R} - 2\int \frac{dx}{R} = xR - \int Rdx + \int dR - 2\int \frac{dx}{R},$$

откуда
$$\int Rdx = \frac{(x+1)R}{2} - l(x+1+R) + C_1,$$

а слѣд., $\int R^5\,dx = \frac{x+1}{12}\,[2R^4 - 5R^2 + 15]\,R - \frac{5}{2}\,l\,(x+1+R) + C =$

$$= \frac{x+1}{12}\,(2x^4 + 8x^3 - x^2 - 18x + 22)\,R - \frac{5}{2}\,l\,(x+1+R) + C.$$

57. II) Если въ интегралѣ

$$\int \frac{(\alpha x + \beta)\,dx}{(Ax^2 + Bx + C)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

имѣемъ, что $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = m$, а **числитель не содержитъ** x'а, такъ что интегралъ имѣетъ собственно такой видъ:

$$K = \int \frac{\beta dx}{(max^2 + mbx + c)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

то можно непосредственно примѣнять подстановку $R'_x = z$

Дѣйствительно, полагая

$$\left(\sqrt{ax^2 + bx + c}\right)'_x = z, \text{ т.-е. } \frac{2ax + b}{2R} = z,$$

получаемъ: $2ax + b = 2zR,$

откуда $2adx = 2Rdz + 2z\,\frac{2ax + b}{2R}\,dx = 2Rdz + 2z^2\,dx$

и, слѣд., $(a - z^2)\,dx = Rdz, \quad \frac{dx}{R} = \frac{dz}{a - z^2}.$

Кромѣ того $(2ax + b)^2 = 4z^2\,R^2,$

т.-е. $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4z^2\,(ax^2 + bx + c)$

или $4a\,(ax^2 + bx) + b^2 = 4z^2\,(ax^2 + bx) + 4cz^2,$

откуда $ax^2 + bx = \frac{4cz^2 - b^2}{4\,(a - z^2)};$

слѣд., $max^2 + mbx + C = \frac{m\,(4cz^2 - b^2) + 4C\,(a - z^2)}{4\,(a - z^2)},$

а потому $K = \beta \int \frac{dz}{\left[\frac{4(mc-C)z^2+4aC-mb^2}{4(a-z^2)}\right]^n (a-z^2)} =$

$$= 4^n \beta \int \frac{(a-z^2)^{n-1}\,dz}{[4(mc-C)z^2+4aC-mb^2]^n}.$$

Прим. Найти $K = \int \frac{dx}{(x^2-2x+4)^2\sqrt{2x^2-4x+1}}$.

Полагая $(\sqrt{2x^2-4x+1})'_x = z$, т.-е. $\frac{2(x-1)}{R} = z$ или $2(x-1) = zR$,

имѣемъ $2dx = Rdz + zdR = Rdz + z^2\,dx$ и, слѣд., $\frac{dx}{R} = \frac{dz}{2-z^2}$;

кромѣ того $4(x^2-2x+1) = z^2R^2 = z^2(2x^2-4x+1)$,

т.-е. $4(x^2-2x)+4 = 2z^2(x^2-2x)+z^2$,

откуда $x^2-2x = \frac{z^2-4}{2(2-z^2)}$ и, слѣд., $x^2-2x+4 = \frac{12-7z^2}{2(2-z^2)}$,

а потому $K = 4\int \frac{(2-z^2)}{(12-7z^2)^2}\,dz = -4\int \frac{z^2-2}{(7z^2-12)^2}\,dz =$

$$= -\frac{z}{21(7z^2-12)} - \frac{13}{21}\int \frac{dz}{7z^2-12} = -\frac{z}{21(7z^2-12)} + \frac{13}{84\sqrt{21}}\,l\frac{z\sqrt{7}+2\sqrt{3}}{z\sqrt{7}-2\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{(x-1)}{42(x^2-2x+4)}R + \frac{13}{84\sqrt{21}}\,l\frac{\sqrt{7}(x-1)+\sqrt{3}\,R}{\sqrt{7}(x-1)-\sqrt{3}\,R}.$$

58. Къ разсмотрѣннымъ выше интеграламъ приводится *интегралъ раціональной функціи x'а и двухъ корней квадратныхъ изъ двучленовъ 1'ой степени*, т.-е. интегралъ вида

$$\int f(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{\alpha x+\beta})\,dx,$$

для чего надо одинъ изъ корней принять за новую перемѣнную.

Дѣйствительно, полагая, напр., $\sqrt{ax+b} = y$,

имѣемъ: $ax+b = y^2$, $x = \frac{y^2-b}{a}$, $dx = \frac{2ydy}{a}$,

а слѣд., $\int f(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{\alpha x+\beta})\,dx =$

$$= \int f\left(\frac{y^2-b}{a}, y, \sqrt{\frac{\alpha y^2+a\beta-b\alpha}{a}}\right)\frac{2ydy}{a} = \int \varphi(y, R)\,dy,$$

гдѣ φ — раціональная функція и $R = \sqrt{\alpha y^2 + a\beta - b\alpha}$.

Прим. Для отысканія

$$I = \int \frac{dx}{(x+\sqrt{x+2})\sqrt{x+1}}$$

полагаемъ: $\sqrt{x+2} = y$, откуда $x = y^2 - 2$, $dx = 2ydy$

и, слѣд., $I = \int \frac{2ydy}{(y^2-2+y)\sqrt{y^2-2+1}} = \int \frac{2ydy}{(y^2+y-2)\sqrt{y^2-1}} =$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dy}{(y-1)\sqrt{y^2-1}} + \frac{4}{3}\int \frac{dy}{(y+2)\sqrt{y^2-1}}.$$

Полагая $\sqrt{y^2-1} = (y-1)z$, имѣемъ: $y^2 - 1 = (y-1)^2 z^2$;

слѣд., $y + 1 = (y-1)z^2$, откуда $y = \frac{z^2+1}{z^2-1}$, $dy = \frac{-4zdz}{(z^2-1)^2}$

и $$\int \frac{dy}{(y-1)\sqrt{y^2-1}} = -\int dz = -z + C_1 = -\frac{\sqrt{y^2-1}}{y-1} + C_1.$$

А полагая $y + 2 = \frac{1}{u}$, откуда $y = \frac{1-2u}{u}$ и $dy = \frac{-du}{u^2}$,

получаемъ: $$\int \frac{dy}{(y+2)\sqrt{y^2-1}} = -\int \frac{du}{\sqrt{3u^2-4u+1}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} l\left(\frac{3u-2}{\sqrt{3}} + R\right) + C_2' = -\frac{1}{\sqrt{3}} l\frac{-2y-1+\sqrt{3}\sqrt{y^2-1}}{\sqrt{3}\,(y+2)} + C_2' =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} l\frac{-2y-1+\sqrt{3}\sqrt{y^2-1}}{y+2} + C_2.$$

Значитъ

$$\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x+2})\sqrt{x+1}} = -\frac{2}{3}\frac{\sqrt{y^2-1}}{y-1} - \frac{4}{3\sqrt{3}} l\frac{-2y-1+\sqrt{3}\sqrt{y^2-1}}{y+2} + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}-1} - \frac{4}{3\sqrt{3}} l\frac{-2\sqrt{x+2}-1+\sqrt{3(x+1)}}{\sqrt{x+2}+2}.$$

§ 3. Интегрированіе дифференціальныхъ биномовъ.

59. **Дифференціальнымъ биномомъ** наз. произведеніе

$$x^k (ax^\alpha + bx^\beta)^p \, dx.$$

Разсмотримъ сначала тѣ частные случаи, когда его интегралъ можетъ быть выраженъ въ конечномъ видѣ помощью извѣстныхъ намъ функцій, при чемъ *будемъ считать всѣ показатели* — **раціональными.**

Самый простой изъ такихъ случаевъ тотъ, когда *число* p — **цѣлое.** Если оно при томъ *положительное, то*, очевидно, *надо лишь развернуть* $(ax^\alpha + bx^\beta)^p$ *по формулѣ бинома Ньютона и примѣнить затѣмъ теорему объ интегралѣ суммы.*

Прим. $$\int x^{\frac{2}{3}} (2x^{-2} + 3x^{\frac{1}{2}})^2 \, dx = \int x^{\frac{2}{3}} (4x^{-4} + 12x^{-\frac{3}{2}} + 9x) \, dx =$$

$$= \int (4x^{-\frac{10}{3}} + 12x^{-\frac{5}{6}} + 9x^{\frac{5}{3}}) \, dx = -\frac{12}{7} x^{\frac{7}{3}} + 72x^{\frac{1}{6}} + \frac{27}{8} x^{\frac{8}{3}} + C.$$

Если же число p — **цѣлое,** *но отрицательное*, то, сообразно съ № 36, интегралъ найдемъ, *введя новую перемѣнную* — именно, *положивъ*

$$x = y^s,$$

гдѣ s — *наименьшее кратное* **знаменателей** *чиселъ* k, α и β.

Прим. $$I = \int x^{\frac{1}{2}} (4x^{\frac{3}{5}} - 9x^{\frac{2}{3}})^{-2} \, dx.$$

Полагая $x = y^{30}$, получаемъ: $dx = 30y^{29} \, dy$

и $$I = 30 \int \frac{y^{15} y^{29} \, dy}{(4y^{18} - 9y^{20})^2} = 30 \int \frac{y^8 \, dy}{(4 - 9y^2)^2} = 10 \int \left(\frac{y^4}{27} + \frac{8}{243} y^2 + \frac{16}{729} \right) dy +$$

$$+ \frac{2560}{729} \int \frac{3y^2 - 1}{(9y^2 - 4)^2} \, dy = \frac{2y^5}{27} + \frac{80y^3}{729} + \frac{160y}{729} + \frac{640}{729} \int \frac{12y^2 - 4}{(9y^2 - 4)^2} \, dy =$$

$$= \underbrace{\frac{54y^5 + 80y^3 + 160y}{729}}_{A} + \frac{640}{729} \int \frac{dy}{9y^2 - 4} + \frac{640}{729} \int \frac{3y^2 \, dy}{(9y^2 - 4)^2} =$$

$$= A + \frac{640}{729}\int \frac{dy}{9y^2-4} + \frac{320}{2187}\int y d\left(-\frac{1}{9y^2-4}\right) = A + \frac{640}{729}\int \frac{dy}{9y^2-4} +$$

$$- \frac{320y}{2187(9y^2-4)} + \frac{320}{2187}\int \frac{dy}{9y^2-4} = A - \frac{320y}{2187(9y^2-4)} + \frac{2240}{2187}\int \frac{dy}{9y^2-4} =$$

$$= \frac{54y^5 + 80y^3 + 160y}{729} - \frac{320y}{2187(9y^2-4)} + \frac{560}{6561} l \frac{3y-2}{3y+2} + C =$$

$$= \frac{54x^{\frac{1}{6}} + 80x^{\frac{1}{10}} + 160x^{\frac{1}{30}}}{729} - \frac{320x^{\frac{1}{30}}}{2187(9x^{\frac{1}{15}}-4)} + \frac{560}{6561} l \frac{3x^{\frac{1}{30}}-2}{3x^{\frac{1}{30}}+2} + C.$$

Замѣчаніе. Очевидно, что если $p = 0$, то интегралъ тоже выразится въ конечномъ видѣ при любомъ x — именно, будетъ равенъ

$$\frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

60. Если *число* p — **дробное,** то обыкновенно упрощаютъ дифференціальный биномъ, вынося степень x'а, стоящую въ одномъ изъ слагаемыхъ, за скобки. Дѣлая это, напр., съ x^{α}, получаемъ:

$$I = \int x^k (ax^{\alpha} + bx^{\beta})^p dx =$$

$$= \int x^{k+\alpha p} (a + bx^{\beta-\alpha})^p dx = \int x^m (a + bx^n)^p dx,$$

гдѣ $m = k + \alpha p$ и $n = \beta - \alpha$; число m наз. **показателемъ внѣ скобокъ,** n — **показателемъ въ скобкахъ,** а p — **показателемъ надъ скобками.** Если теперь положимъ

$$a + bx^n = y,$$

то получимъ: $x = \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$ и $dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dy,$

а слѣд.,

$$I = \int \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} y^p \frac{1}{nb}\left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dy = \frac{1}{n\sqrt[n]{b^{m+1}}} \int y^p (y-a)^{\frac{m+1}{n}-1} dy;$$

примѣняя къ послѣднему интегралу сказанное въ предъидущемъ №'ѣ, заключаемъ, что интегралъ выразится въ конечномъ видѣ при *любомъ* дробномъ p, если только число $\left(\frac{m+1}{n}-1\right)$ — *цѣлое либо равное нулю*, при чемъ если оно отрицательно, а $p=\frac{r}{s}$, гдѣ числа r и s — цѣлыя, то лучше, очевидно, положить сразу

$$a+bx^n=y^s.$$

Прим. 1. $$I=\int x^{\frac{2}{3}}(4+x^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Здѣсь $p=-\frac{1}{2}$ — дробное, но $\frac{m+1}{n}-1=\frac{\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}}-1=4$ — цѣлое >0;

поэтому, полагая $$4+x^{\frac{1}{3}}=y,$$

имѣемъ: $$x=(y-4)^3,\quad dx=3(y-4)^2dy$$

и, слѣд., $$I=\int(y-4)^2y^{-\frac{1}{2}}.3(y-4)^2dy=3\int(y-4)^4y^{-\frac{1}{2}}dy=$$

$$=3\int\{y^{\frac{7}{2}}-16y^{\frac{5}{2}}+96y^{\frac{3}{2}}+256y^{\frac{1}{2}}+256y^{-\frac{1}{2}}\}dy=$$

$$=\frac{2}{3}y^{\frac{9}{2}}-\frac{32}{7}y^{\frac{7}{2}}+\frac{192}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{512}{3}y^{\frac{3}{2}}+512y^{\frac{1}{2}}+C=$$

$$=\left\{\frac{2}{3}(4+x^{\frac{1}{3}})^4-\frac{32}{7}(4+x^{\frac{1}{3}})^3+\frac{192}{5}(4+x^{\frac{1}{3}})^2-\frac{512}{3}(4+x^{\frac{1}{3}})+512\right\}\sqrt{4+x^{\frac{1}{3}}}+C.$$

Прим. 2. $$I=\int\frac{\sqrt{2-\sqrt{x}}}{x}dx=\int x^{-1}(2-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}dx.$$

Здѣсь $p=\frac{1}{2}$ — дробное, а $\frac{m+1}{n}-1=\frac{-1+1}{\frac{1}{2}}-1=-1$ — цѣлое <0,

почему полагаемъ $$2-\sqrt{x}=y^2;$$

тогда $$x=(2-y^2)^2\quad\text{и}\quad dx=-4(2-y^2)ydy,$$

а слѣд., $$I=-\int\frac{y.4(2-y^2)ydy}{(2-y^2)^2}=4\int\frac{y^2dy}{y^2-2}=4\int\left(1+\frac{2}{y^2-2}\right)dy=$$

$$=4y+\frac{4}{\sqrt{2}}l\frac{y-\sqrt{2}}{y+\sqrt{2}}+C=4\sqrt{2-\sqrt{x}}+2\sqrt{2}\,l\frac{\sqrt{2-\sqrt{x}}-\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{x}}+\sqrt{2}}+C.$$

Прим. 3. $I=\int \sqrt[3]{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}(1+x^{-\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}dx.$

Здѣсь $p=\frac{1}{2}$ — дробное, а $\frac{m+1}{n}-1=\frac{\frac{1}{3}+1}{-\frac{2}{3}}-1=-3-$ цѣлое <0;

полагая поэтому $1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=y^2$ или $\sqrt[3]{x^2}=(y^2-1)^{-1}$,

имѣемъ $x=(y^2-1)^{-\frac{3}{2}}$ и $dx=-3(y^2-1)^{-\frac{5}{2}}ydy$,

а слѣд., $I=-\int(y^2-1)^{-\frac{1}{2}}.y.3(y^2-1)^{-\frac{5}{2}}ydy=-3\int\frac{y^2\,dy}{(y^2-1)^3}=$

$$=\frac{3}{4}\int yd\left[\frac{1}{(y^2-1)^2}\right]=\underbrace{\frac{3y}{4(y^2-1)^2}}_{A}-\frac{3}{4}\int\frac{dy}{(y^2-1)^2}=A+\frac{3}{4}\int\frac{y^2-1-y^2}{(y^2-1)^2}dy=$$

$$=A+\frac{3}{4}\int\frac{dy}{y^2-1}+\frac{3}{4}\int yd\left[\frac{1}{2(y^2-1)}\right]=A+\frac{3}{4}\int\frac{dy}{y^2-1}+$$

$$+\frac{3y}{8(y^2-1)}-\frac{3}{8}\int\frac{dy}{y^2-1}=\frac{3y}{4(y^2-1)^2}+\frac{3y}{8(y^2-1)}+\frac{3}{16}l\frac{y-1}{y+1}+C=$$

$$=\frac{3\sqrt{1+x^{-\frac{2}{3}}}}{4x^{-\frac{4}{3}}}+\frac{3\sqrt{1+x^{-\frac{2}{3}}}}{8x^{-\frac{2}{3}}}+\frac{3}{16}l\frac{\sqrt{1+x^{-\frac{2}{3}}}-1}{\sqrt{1+x^{-\frac{2}{3}}}+1}+C=$$

$$=\frac{3}{4}x\sqrt{x^{\frac{2}{3}}+1}+\frac{3}{8}\sqrt{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}+\frac{3}{16}l\frac{\sqrt{x^{\frac{2}{3}}+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^{\frac{2}{3}}+1}+\sqrt[3]{x}}+C=$$

$$=\frac{3}{4}\left(x+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x^{\frac{2}{3}}+1}+\frac{3}{8}l\left(\sqrt{x^{\frac{2}{3}}+1}-\sqrt[3]{x}\right)+C.$$

61. Вмѣсто того, чтобы выносить въ двучленѣ $ax^{\alpha}+bx^{\beta}$ за скобки x^{α}, можно было вынести x^{β}; дѣлая это, т.-е., иначе говоря, *вынося въ дифф. биномъ* $x^m(a+bx^n)dx$ *за скобки* x^n, получимъ, что

$$I=\int x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p\,dx;$$

полагая-же $m_1=m+np,\ n_1=-n,$

имѣемъ $\frac{m_1+1}{n_1}=\frac{(m+np)+1}{-n}=-\left(\frac{m+1}{n}+p\right),$

почему, на основаніи предъидущаго №-а, заключаемъ, что интегралъ найдется въ конечномъ видѣ еще въ случаѣ, когда число $\frac{m+1}{n}+p$ — цѣлое, либо равное нулю.

62. Итакъ, интегралъ $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ выражается въ конечномъ видѣ въ слѣдующихъ случаяхъ.

I) *Когда число* p — цѣлое; при этомъ если оно *положительно*, то *интегралъ находимъ, развертывая степень* $(a+bx^n)^p$, а если оно *отрицательно*, то *для нахожденія интеграла полагаемъ* $x=y^s$, гдѣ s — *наименьшее кратное* знаменателей *чиселъ* m *и* n.

II) *Когда число* $\frac{m+1}{n}$ — цѣлое либо равное нулю; *этотъ случай сводимъ на предъидущій*, принимая двучленъ въ скобкахъ за новую перемѣнную.

и III) *Когда число* $\frac{m+1}{n}+p$ — цѣлое либо равное нулю; *этотъ случай приводимъ ко второму*, вынося x^n изъ двучлена за скобки.

Прим. $$I=\int\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx=\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Здѣсь p и $\frac{m+1}{n}$ — дробныя, но $\frac{m+1}{n}+p=1$ — цѣлое >0;

поэтому пишемъ, что $$I=\int(x^{-1}+1)^{\frac{1}{2}}\,dx,$$

и затѣмъ полагаемъ $$x^{-1}+1=y^2;$$

тогда $$x=\frac{1}{y^2-1}\quad\text{и}\quad dx=-\frac{2ydy}{(y^2-1)^2},$$

а слѣд., $$I=-\int y\frac{2ydy}{(y^2-1)^2}=\int yd\frac{1}{y^2-1}=\frac{y}{y^2-1}+\frac{1}{2}l\frac{y+1}{y-1}+C=$$

$$=\frac{\sqrt{x^{-1}+1}}{x^{-1}}+\frac{1}{2}l\frac{\sqrt{x^{-1}+1}+1}{\sqrt{x^{-1}+1}-1}+C=$$

$$=\sqrt{x^2+x}+l(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})+C.$$

63. Если ни одинъ изъ указанныхъ признаковъ интегрируемости не выполняется, то, какъ доказалъ впервые (въ

1843-мъ г.) русскій математикъ, академикъ П. Л. Чебышевъ, интегралъ дифференціальнаго бинома не выражается въ конечномъ видѣ помощью простѣйшихъ функцій, а представляетъ *новую* функцію, зависящую отъ показателей m, n и p. Для изученія ея свойствъ надо по возможности упростить подъинтегральное выраженіе; съ этой цѣлью прежде всего преобразовываемъ его такъ, чтобы двучленъ въ скобкахъ имѣлъ видъ $1-z$, при чемъ надо различать два случая.

I) **Коэфиціенты a и b одного знака.**

Полагая тогда $\underline{a+bx^n=\frac{a}{z}}$,

имѣемъ: $bx^n=\frac{a(1-z)}{z}$, $x^n=\frac{a}{b}\frac{1-z}{z}$;

слѣд., $x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{\frac{1}{n}}$, $dx=-\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{\frac{1}{n}-1}\frac{dz}{z^2}$

и $$I=-\frac{1}{n}\int\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{\frac{m}{n}}\cdot\left(\frac{a}{z}\right)^{p}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{\frac{1}{n}-1}\frac{dz}{z^2}=$$

$$=-\frac{a^p}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int z^{-\frac{m+1}{n}-p+1}(1-z)^{\frac{m+1}{n}-1}dz.$$

II) **Коэфиціенты a и b разныхъ знаковъ.**

Въ этомъ случаѣ полагаемъ просто $\underline{bx^n=-az}$;

тогда

$$x=\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}z^{\frac{1}{n}},\quad dx=\frac{1}{n}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}z^{\frac{1}{n}-1}dz \quad \text{и} \quad a+bx^n=a(1-z),$$

а слѣд., $$I=\frac{1}{n}\int\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}z^{\frac{m}{n}}\cdot a^p(1-z)^p\cdot\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}z^{\frac{1}{n}-1}dz=$$

$$=\frac{a^p}{n}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}(1-z)^p\,dz.$$

Прим. 1. Упростить $I = \int x^{\frac{1}{3}} (2 + 3x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\, dx.$

Полагая $$2 + 3x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{z},$$

имѣемъ:

$$x^{\frac{1}{2}} = \frac{2(1-z)}{3z},\quad x = \frac{4(1-z)^2}{9z^2},\quad dx = -\frac{8}{9}\,\frac{1-z}{z}\,\frac{dz}{z^2} = -\frac{8(1-z)\,dz}{9z^3},$$

а слѣд.,

$$I = -\frac{8}{9}\int \sqrt[3]{\frac{4}{9}}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{2}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{(1-z)\,dz}{z^3} = -\frac{16\sqrt[6]{2}}{9\sqrt[3]{9}}\int z^{-\frac{25}{6}}(1-z)^{\frac{5}{3}}\,dz.$$

Прим. 2. Упростить $I = \int x^{\frac{2}{5}} (9 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}\, dx.$

Полагая $$x^{\frac{2}{3}} = 9z,$$

получаемъ: $$x = 27z^{\frac{3}{2}},\quad dx = \frac{81}{2}\,z^{\frac{1}{2}}\,dz,\quad 9 - x^{\frac{2}{3}} = 9(1-z)$$

и, слѣд., $$I = \int 27^{\frac{2}{5}}\, z^{\frac{3}{5}}\cdot 9^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{81}{2}\,z^{\frac{1}{2}}\,dz = \frac{729\sqrt[5]{3}}{2}\int z^{\frac{11}{10}}(1-z)^{\frac{1}{2}}\,dz.$$

64. Когда дифференціальный биномъ приведенъ къ виду $z^r\,(1-z)^s\,dz$, то можно еще, *помощью интегрированія по частямъ*, уменьшить показатели r и s по абсолютной величинѣ такъ, что они будутъ заключаться между $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$. При этомъ надо помнить, что *при подведеніи подъ знакъ дифференціала того или другаго изъ множителей z^r и $(1-z)^s$ показатель его повышается, показатель же другаго, по примѣненіи формулы интегрированія по частямъ, понизится.*

Поэтому, если 1) требуется *одинъ показатель понизить, а другой повысить*, то способъ дѣйствія ясенъ самъ собой; если 2) одинъ изъ показателей надо *понизить, не мѣняя другаго*, то, примѣнивъ интегрированіе по частямъ и получивъ $z^{r+1}(1-z)^{s-1}$ либо $z^{r-1}(1-z)^{s+1}$, надо воспользоваться равенствами

$$z^{r+1}(1-z)^{s-1} = z^r\cdot z(1-z)^{s-1} =$$

$$= z^r(z-1+1)(1-z)^{s-1} = -z^r(1-z)^s + z^r(1-z)^{s-1}$$

и $$z^{r-1}(1-z)^{s+1} = z^{r-1}(1-z)^s(1-z) = z^{r-1}(1-z)^s - z^r(1-z)^s;$$

затѣмъ, если 3) требуется одинъ показатель *повысить, не мѣняя другаго,* то надо предварительно помножить биномъ на $[(1-z)+z]$ (т.-е. на единицу) и потомъ, разбивъ интегралъ на сумму двухъ, примѣнить интегрированіе по частямъ; наконецъ, если 4) надо *оба показателя повысить* либо *оба понизить* то сначала повышаемъ (понижаемъ) одинъ, не мѣняя другаго, а затѣмъ управляемся со вторымъ, не меняя перваго, ужѣ приведеннаго въ нужныя границы. Слѣдующіе примѣры вполнѣ разъясняютъ эти общія указанія.

Прим. 1. $$I=\int x^{-\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{4}{3}}\,dx.$$

Здѣсь $r=-\frac{3}{2}$, $s=\frac{4}{3}$; r надо повысить, а s — понизить, поэтому подводимъ $x^{-\frac{3}{2}}$ подъ знакъ дифференціала:

$$I=\int(1-x)^{\frac{4}{3}}d\left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]=-2x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{4}{3}}-\frac{8}{3}\int x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{3}}\,dx.$$

Прим. 2. $$I=\int x^{\frac{5}{2}}(1-x)^{-\frac{4}{3}}\,dx.$$

Здѣсь надо понизить r, а повысить s; поэтому пишемъ, что

$$I=\int x^{\frac{5}{2}}d\left[3(1-x)^{-\frac{1}{3}}\right]=3x^{\frac{5}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}-\frac{15}{2}\int x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}\,dx.$$

Прим. 3. $$I=\int x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}\,dx.$$

Здѣсь надо *понизить r, не мѣняя s;* поэтому поступаемъ такъ:

$$I=\int x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}dx=\int x^{\frac{3}{2}}d\left[-\frac{3}{2}(1-x)^{\frac{2}{3}}\right]=\underbrace{-\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{2}{3}}}_{A}+$$

$$+\frac{9}{4}\int x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{2}{3}}\,dx=A+\frac{9}{4}\int x^{\frac{1}{2}}(1-x)(1-x)^{-\frac{1}{3}}\,dx=$$

$$=A+\frac{9}{4}\int(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}})(1-x)^{-\frac{1}{3}}\,dx=A+\frac{9}{4}\int x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}\,dx+$$

$$-\frac{9}{4}\int x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}\,dx;$$

перенося послѣдній членъ въ лѣвую часть и дѣлая приведеніе, получаемъ:

$$\frac{13}{4} I = A + \frac{9}{4} \int x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{3}} dx,$$

откуда $$I = -\frac{6}{13} x^{\frac{3}{2}} (1-x)^{\frac{2}{3}} + \frac{9}{13} \int x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{3}} dx.$$

Прим. 4. $$I = \int x^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{3}{2}} dx.$$

Здѣсь надо, наоборотъ, *понизить s, не мѣняя r*, для чего поступаемъ такъ:

$$I = \int x^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{3}{2}} dx = \int (1-x)^{\frac{3}{2}} d\left(\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}}\right) = \underbrace{\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} (1-x)^{\frac{3}{2}}}_{A} +$$

$$+ \frac{9}{8} \int x^{\frac{4}{3}} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx = A + \frac{9}{8} \int x^{\frac{1}{3}} (x - 1 + 1)(1-x)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= A - \frac{9}{8} \int x^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{3}{2}} dx + \frac{9}{8} \int x^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx = A - \frac{9}{8} I + \frac{9}{8} \int x^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx;$$

слѣд., $$\frac{17}{8} I = A + \frac{9}{8} \int x^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx$$

и потому $$I = \frac{6}{17} x^{\frac{4}{3}} (1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{17} \int x^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Можно этотъ интегралъ найти еще и такъ:

$$I = \int x^{\frac{1}{3}} (1-x)(1-x)^{\frac{1}{2}} dx = \underbrace{\int x^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx} - \int x^{\frac{4}{3}} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= J + \int x^{\frac{4}{3}} d\left[\frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}}\right] = J + \frac{2}{3} x^{\frac{4}{3}} (1-x)^{\frac{3}{2}} +$$

$$- \frac{8}{9} \int x^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{3}{2}} dx = J + \frac{2}{3} x^{\frac{4}{3}} (1-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{9} I,$$

откуда $$\frac{17}{9} I = \frac{2}{3} x^{\frac{4}{3}} (1-x)^{\frac{3}{2}} + \int x^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx$$

и, слѣд., опять $$I = \frac{6}{17} x^{\frac{4}{3}} (1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{17} \int x^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Прим. 5. $$I = \int x^{\frac{5}{4}} (1-x)^{\frac{9}{7}} dx.$$

Здѣсь надо *понизить* u r, u s; поэтому дѣйствуемъ слѣдующимъ образомъ:

$$I=\int x^{\frac{5}{4}}(1-x)^{\frac{9}{7}}dx=\int x^{\frac{5}{4}}d\left[-\frac{7}{16}(1-x)^{\frac{16}{7}}\right]=\underbrace{-\frac{7}{16}x^{\frac{5}{4}}(1-x)^{\frac{16}{7}}}_{A}+$$

$$+\frac{35}{64}\int x^{\frac{1}{4}}(1-x)^{\frac{16}{7}}dx=A+\frac{35}{64}\int x^{\frac{1}{4}}(1-x)(1-x)^{\frac{9}{7}}dx=$$

$$=A+\frac{35}{64}\int x^{\frac{1}{4}}(1-x)^{\frac{9}{7}}dx-\frac{35}{64}I,$$

откуда $$I=-\frac{28}{99}x^{\frac{5}{4}}(1-x)^{\frac{16}{7}}+\frac{35}{99}\int x^{\frac{1}{4}}(1-x)^{\frac{9}{7}}dx.$$

Затѣмъ

$$K=\int x^{\frac{1}{4}}(1-x)^{\frac{9}{7}}dx=\int(1-x)^{\frac{9}{7}}d\left[\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}\right]=\underbrace{\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}(1-x)^{\frac{9}{7}}}_{B}+$$

$$+\frac{36}{35}\int x^{\frac{5}{4}}(1-x)^{\frac{2}{7}}dx=B+\frac{36}{35}\int x^{\frac{1}{4}}(x-1+1)(1-x)^{\frac{2}{7}}dx=$$

$$=B-\frac{36}{35}K+\frac{36}{35}\int x^{\frac{1}{4}}(1-x)^{\frac{2}{7}}dx,$$

откуда $$K=\frac{28}{71}x^{\frac{5}{4}}(1-x)^{\frac{9}{7}}+\frac{36}{71}\int x^{\frac{1}{4}}(1-x)^{\frac{2}{7}}dx,$$

а слѣд.,

$$I=-\frac{28}{99}x^{\frac{5}{4}}(1-x)^{\frac{16}{7}}+\frac{980}{7029}x^{\frac{5}{4}}(1-x)^{\frac{9}{7}}+\frac{1260}{7029}\int x^{\frac{1}{4}}(1-x)^{\frac{2}{7}}dx.$$

Прим. 6. $$I=\int x^{-\frac{6}{5}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx.$$

Тутъ надо *повысить* r, *не мѣняя* s; для этого дѣйствуемъ такъ:

$$I=\int x^{-\frac{6}{5}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx=\int x^{-\frac{6}{5}}(1-x)^{\frac{1}{2}}(1-x+x)dx=\int x^{-\frac{6}{5}}(1-x)^{\frac{3}{2}}dx+$$

$$+\underbrace{\int x^{-\frac{1}{5}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx}_{K}=\int(1-x)^{\frac{3}{2}}d(-5x^{-\frac{1}{5}})+K=-5x^{-\frac{1}{5}}(1-x)^{\frac{3}{2}}+$$

$$-\frac{15}{2}\int x^{-\frac{1}{5}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx+K=-5x^{-\frac{1}{5}}(1-x)^{\frac{3}{2}}-\frac{13}{2}\int x^{-\frac{1}{5}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx.$$

Прим. 7. $$I=\int x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{9}{7}}dx.$$

Такъ какъ здѣсь надо *повысить r, не мѣняя s*, то пишемъ, что

$$I=\int x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{9}{7}}\,dx=\int x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{9}{7}}(1-x+x)\,dx=$$

$$=\underbrace{\int x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{2}{7}}\,dx}_{K}+\int x^{\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{9}{7}}\,dx=K+\int x^{\frac{3}{4}}\,d\left[\frac{7}{2}(1-x)^{-\frac{2}{7}}\right]=$$

$$=K+\frac{7}{2}x^{\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{2}{7}}-\frac{21}{8}\int x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{2}{7}}\,dx=\frac{7}{2}x^{\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{2}{7}}+$$

$$-\frac{13}{8}\int x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{2}{7}}\,dx.$$

Прим. 8. $$I=\int x^{-\frac{5}{4}}(1-x)^{-\frac{9}{7}}\,dx.$$

Тутъ надо *повысить и r, и s*; этого достигаемъ такъ:

$$I=\int x^{-\frac{5}{4}}(1-x)^{-\frac{9}{7}}\,dx=\int x^{-\frac{5}{4}}(1-x)^{-\frac{9}{7}}[(1-x)+x]\,dx=$$

$$=\int x^{-\frac{5}{4}}(1-x)^{-\frac{2}{7}}\,dx+\int x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{9}{7}}\,dx=$$

$$=\int x^{-\frac{5}{4}}(1-x)^{-\frac{2}{7}}[(1-x)+x]\,dx+\int x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{2}{7}}[(1-x)+x]\,dx=$$

$$=\int x^{-\frac{5}{4}}(1-x)^{\frac{5}{7}}\,dx+2\underbrace{\int x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{2}{7}}\,dx}_{K}+\int x^{\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{9}{7}}\,dx=$$

$$=\int(1-x)^{\frac{5}{7}}\,d\left[-4x^{-\frac{1}{4}}\right]+2K+\int x^{\frac{3}{4}}\,d\left[\frac{7}{2}(1-x)^{-\frac{2}{7}}\right]=-4x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{\frac{5}{7}}+$$

$$-\frac{20}{7}\int x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{2}{7}}\,dx+2K+\frac{7}{2}x^{\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{2}{7}}-\frac{21}{8}\int x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{2}{7}}\,dx=$$

$$=-4x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{\frac{5}{7}}+\frac{7}{2}x^{\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{2}{7}}-\frac{195}{56}\int x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{2}{7}}\,dx.$$

Глава IV.

Интегрированіе трансцендентныхъ функцій.

§ 1. Общія указанія.

65. Интегрированіе функцій, зависящихъ отъ трансцендентныхъ сложныхъ чиселъ, въ простѣйшихъ случаяхъ совершается непосредственно; во всѣхъ же остальныхъ — помощью *замѣны перемѣнной* либо *интегрированія по частямъ*.

Замѣна перемѣнной чаще всего употребляется тогда, когда подъ интеграломъ стоитъ *произведеніе функціи какого-либо трансцендентнаго сложнаго числа на производную послѣдняго*, т.-е. когда ищется интегралъ вида

$$\int f(u)\, u'_x\, dx.$$

Найдемъ его, очевидно, тогда, когда $\int f(u)\, du$ принадлежитъ къ числу разсмотрѣнныхъ выше.

Прим. 1. Найти $$I = \int \frac{(lx)^3 + lx}{(lx)^2 - 1}\, \frac{dx}{x}.$$

Полагая $lx = y$, имѣемъ что, $\frac{dx}{x} = dy$,

а слѣд.,

$$I=\int\frac{y^3+y}{y^2-1}\,dy=\int y\,dy+\int\frac{2y\,dy}{y^2-1}=\frac{y^2}{2}+l\,(y^2-1)+C=\frac{(lx)^2}{2}+l\,[(lx)^2-1]+C.$$

Прим. 2. Найти $$I=\int\sqrt{\frac{lx}{1-(lx)^3}}\,\frac{dx}{x}.$$

Полагая опять $lx=y$, получимъ:

$$I=\int\sqrt{\frac{y}{1-y^3}}\,dy=\int y^{\frac{1}{2}}(1-y^3)^{-\frac{1}{2}}\,dy;$$

это — интегралъ дифф. бинома, при чемъ

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{\frac{1}{2}+1}{3}-\frac{1}{2}=0-\text{цѣлое};$$

поэтому пишемъ, что $$I=\int y^{-1}(y^{-3}-1)^{-\frac{1}{2}}\,dy,$$

и затѣмъ полагаемъ $$y^{-3}-1=z^2,$$

откуда $$y^{-3}=z^2+1,\ y=(z^2+1)^{-\frac{1}{3}},\ dy=-\frac{2}{3}(z^2+1)^{-\frac{4}{3}}z\,dz;$$

тогда $$I=-\frac{2}{3}\int(z^2+1)^{\frac{1}{3}}\cdot z^{-1}\cdot(z^2+1)^{-\frac{4}{3}}z\,dz=-\frac{2}{3}\int\frac{dz}{z^2+1}=$$

$$=-\frac{2}{3}\operatorname{Arctg}z+C=-\frac{2}{3}\operatorname{Arctg}\sqrt{y^{-3}-1}+C=-\frac{2}{3}\operatorname{Arctg}\sqrt{\frac{1-y^3}{y^3}}+C=$$

$$=-\frac{2}{3}\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{1-(lx)^3}}{lx\sqrt{lx}}+C.$$

Прим. 3. Найти $$I=\int\frac{2^x+3}{4^x-2^x}\,dx.$$

Полагая $2^x=y$, имѣемъ $xl2=ly$ и $l2\,dx=\frac{dy}{y}$,

а слѣд.,

$$I=\int\frac{y+3}{y^2-y}\,\frac{dy}{yl2}=\frac{1}{l2}\int\frac{y+3}{y^2(y-1)}\,dy=\frac{1}{l2}\int\left\{-\frac{3}{y^2}-\frac{4}{y}+\frac{4}{y-1}\right\}dy=$$

$$=\frac{1}{l2}\left\{\frac{3}{y}-4ly+4l(y-1)\right\}+C=\frac{3}{2^x\,l2}-4x+\frac{4}{l2}\,l\,[2^x-1]+C.$$

Прим. 4. Найти $$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9^x+2.3^x-1}}.$$

Положеніе $3^x = y$ дастъ: $x l3 = ly$, $l3 . dx = \frac{dy}{y}$

и, слѣд., $I = \frac{1}{l3}\int \frac{dy}{y\sqrt{y^2+2y-1}} = -\frac{1}{l3}\int \frac{d\frac{1}{y}}{\sqrt{1+2\cdot\frac{1}{y}-\left(\frac{1}{y}\right)^2}} =$

$= \frac{1}{l3}\operatorname{Arcsin}\frac{-2\cdot\frac{1}{y}+2}{\sqrt{2^2-4.1(-1)}} + C = \frac{1}{l3}\operatorname{Arcsin}\frac{y-1}{y\sqrt{2}} + C = \frac{1}{l3}\operatorname{Arcsin}\frac{3^x-1}{3^x\sqrt{2}} + C.$

Прим. 5. $I = \int \frac{\operatorname{Arccos}^2 x - 5\operatorname{Arcsin} x + 1}{\operatorname{Arcsin}^3 x . \sqrt{1-x^2}}\, dx.$

Полагая $\operatorname{Arcsin} x = y$, имѣемъ, что $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dy$

и, слѣд., $I = \int \frac{\left(\frac{\pi}{2}-y\right)^2 - 5y + 1}{y^3}\, dy = \int \left\{\frac{\pi^2+4}{4y^3} - \frac{\pi+5}{y^2} + \frac{1}{y}\right\} dy =$

$= -\frac{\pi^2+4}{8y^2} + \frac{\pi+5}{y} + ly + C = -\frac{\pi^2+4}{8\operatorname{Arcsin}^2 x} + \frac{\pi+5}{\operatorname{Arcsin} x} + l\operatorname{Arcsin} x + C.$

Прим. 6. $I = \int \frac{\operatorname{Arctg}^7 x . \sqrt[5]{(2\operatorname{Arctg}^4 x + 1)^2}}{x^2+1}\, dx.$

Положеніе $\operatorname{Arctg} x = y$ даетъ: $\frac{dx}{x^2+1} = dy$

и, слѣд., $I = \int y^7 \sqrt[5]{(2y^4+1)^2}\, dy = \int y^7 (1+2y^4)^{\frac{2}{5}}\, dy;$

полагая въ свою очередь $1 + 2y^4 = u,$

имѣемъ: $y^4 = \frac{u-1}{2}, \quad 4y^3\, dy = \frac{du}{2}$

и, слѣд.,

$I = \int \frac{u-1}{2}\cdot u^{\frac{2}{5}}\cdot\frac{du}{8} = \frac{1}{16}\int (u^{\frac{7}{5}} - u^{\frac{2}{5}})\, du = \frac{1}{16}\left(\frac{5}{12}u^{\frac{12}{5}} - \frac{5}{7}u^{\frac{7}{5}}\right) + C =$

$= \frac{5}{16}\left(\frac{u^2}{12} - \frac{u}{7}\right)\sqrt[5]{u^2} + C = \frac{5}{16}\left[\frac{(1+2y^4)^2}{12} - \frac{1+2y^4}{7}\right]\sqrt[5]{(1+2y^4)^2} + C =$

$= \frac{5}{1344}\{28\operatorname{Arctg}^8 x + 4\operatorname{Arctg}^4 x - 5\}\sqrt[5]{(1+2\operatorname{Arctg}^4 x)^2} + C.$

Прим. 7. $I = \int \frac{\operatorname{Arccosec}^2 x + 1}{\operatorname{Arccosec}^3 x + 2\operatorname{Arccosec} x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2(x^2-1)}}.$

Полагая $\operatorname{Arccosec} x = y$, получаемъ:

$$I = -\int \frac{y^2+1}{y^3+2y}\,dy = -\frac{1}{2}\int \frac{y\,dy}{y^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{4}l(y^2+2) - \frac{1}{2}ly + C =$$

$$= -\frac{1}{4}l(y^4+2y^2) + C = -l\sqrt[4]{\operatorname{Arccosec}^4 x + 2\operatorname{Arccosec}^2 x} + C.$$

Интегрированіе по частямъ. При примѣненіи этого метода надо помнить, во-первыхъ, что функціи e^x, $\sin x$ и $\cos x$, какъ при дифференцированіи ихъ, такъ и при подведеніи ихъ подъ знакъ дифференціала приводятъ къ этимъ же самымъ функціямъ, тогда какъ логариѳмическія и круговыя функціи отъ дифференцированія упрощаются, превращаясь въ выраженія алгебрическія; а во-вторыхъ, что степень цѣлаго многочлена отъ подведенія его подъ знакъ дифференціала повышается, а отъ дифференцированія понижается.

Прим. 1. $\int (x^2+3x-5)\,e^x\,dx = \int (x^2+3x-5)\,d(e^x) =$

$$= \underbrace{(x^2+3x-5)\,e^x - \int e^x.(2x+3)\,dx}_{A} = A - \int (2x+3)\,d(e^x) =$$

$$= A - (2x+3)\,e^x + \int e^x.2dx = (x^2+x-6)\,e^x + C.$$

Прим. 2. $\int (3x^2-2x+6)\cos x dx = \int (3x^2-2x+6)\,d\sin x =$

$$= \underbrace{(3x^2-2x+6)\sin x - \int \sin x.(6x-2)\,dx}_{A} = A + \int (6x-2)\,d\cos x =$$

$$= A + (6x-2)\cos x - \int \cos x.6dx = (3x^2-2x)\sin x + (6x-2)\cos x + C.$$

Прим. 3. $I = \int (4\cos 2x - 3\sin 2x)\,e^{3x}\,dx = \int (4\cos 2x - 3\sin 2x)\,d\frac{e^{3x}}{3} =$

$$= \underbrace{\frac{4\cos 2x - 3\sin 2x}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}.(-4\sin 2x - 3\cos 2x)\,dx}_{A} =$$

$$= A + \frac{2}{3}\int (4\sin 2x + 3\cos 2x)\,d\frac{e^{3x}}{3} = \underbrace{A + \frac{2}{9}(4\sin 2x + 3\cos 2x)\,e^{3x} +}_{B}$$

$$- \frac{4}{9}\int e^{3x}.(4\cos 2x - 3\sin 2x)\,dx = B - \frac{4}{9}I + C;$$

слѣд., $\frac{13}{9} I = B + C, \quad I = \frac{18\cos 2x - \sin 2x}{13} e^{3x} + C_1.$

Прим. 4. $\int (8x-7)(lx)^2\,dx = \int (lx)^2\,d(4x^2-7x) = \underbrace{(4x^2-7x)(lx)^2}_{A} +$

$$- \int (4x^2-7x)\,2lx\,\frac{dx}{x} = A - 2\int (4x-7)\,lx\,dx = A - 2\int lx\,d(2x^2-7x) =$$

$$= \underbrace{A - 2(2x^2-7x)\,lx}_{B} + 2\int (2x^2-7x)\,\frac{dx}{x} = B + 2\int (2x-7)\,dx =$$

$$= (4x^2-7x)(lx)^2 - (4x^2-14x)\,lx + (2x^2-14x) + C.$$

Прим. 5. $\int \operatorname{Arcsin}^3 x\,dx = \underbrace{x \operatorname{Arcsin}^3 x}_{A} - \int x.3\operatorname{Arcsin}^2 x\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= A + 3\int \operatorname{Arcsin}^2 x\,\frac{-2x\,dx}{2\sqrt{1-x^2}} = A + 3\int \operatorname{Arcsin}^2 x\;d\sqrt{1-x^2} =$$

$$= \underbrace{A + 3\sqrt{1-x^2}\operatorname{Arcsin}^2 x}_{B} - 3\int \sqrt{1-x^2}.2\operatorname{Arcsin} x\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= B - 6\int \operatorname{Arcsin} x\,dx = B - 6x\operatorname{Arcsin} x + 6\int x\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\operatorname{Arcsin}^3 x +$$

$$+ 3\sqrt{1-x^2}\operatorname{Arcsin}^2 x - 6x\operatorname{Arcsin} x - 6\sqrt{1-x^2} + C.$$

Теперь разберемъ еще послѣдовательно нѣкоторые спеціальные пріемы для интегрированія трансцендентныхъ функцій.

§ 2. Функціи, содержащія знакъ логариѳма.

66. I. Интегралъ $\int (lx)^n\,dx,$

въ которомъ n — цѣлое положительное число, найдемъ n — кратнымъ интегрированіемъ по частямъ:

$$\int (lx)^n\,dx = x(lx)^n - n\int x.(lx)^{n-1}\,\frac{dx}{x} = x(lx)^n - n\int (lx)^{n-1}\,dx =$$

$$= x(lx)^n - n\,x(lx)^{n-1} + n(n-1)\int x.(lx)^{n-1}\,\frac{dx}{x} = x(lx)^n - n\,x(lx)^{n-1} +$$

$$+ n(n-1)\int (lx)^{n-2}\,dx = \ldots.$$

$$= x\{(lx)^n - n(lx)^{n-1} + n(n-1)(lx)^{n-2} - n(n-1)(n-2)(lx)^{n-3} + \ldots.$$

$$+ (-1)^{n-1}\,.\,n(n-1)(n-2)\ldots.2\,.\,lx +$$

$$+ (-1)^n\,.\,n(n-1)(n-2)\ldots.3\,.\,2\,.\,1\} + C.$$

67. II. **Интегралъ** $\int \frac{dx}{lx}$ *въ конечномъ видѣ не выражается*, а *представляетъ* **новую** *функцію*, которую называютъ **интегрально-логариѳмической** или просто **интегральнымъ логариѳмомъ.** То изъ ея значеній, которое обращается въ нуль при $x = 1$, обозначаютъ черезъ $li(x)$, такъ что

$$\int \frac{dx}{lx} = li(x) + C.$$

Прим. $\int \frac{dx}{lx + 3} = \int \frac{dx}{lx + l(e^3)} = \int \frac{dx}{l(e^3 x)} = \frac{1}{e^3}\int \frac{d(e^3 x)}{l(e^3 x)} = \frac{1}{e^3} li(e^3 x) + C.$

68. III. **Интегралъ** $\int \frac{dx}{(lx)^n}$, *въ которомъ* n *— цѣлое положительное число*, сводится къ интегральному логариѳму помощью *интегрированія по частямъ:*

$$\int \frac{dx}{(lx)^n} = \int \frac{x}{(lx)^n}\frac{dx}{x} = \int x\frac{dlx}{(lx)^n} = \int x d\left[-\frac{1}{(n-1)(lx)^{n-1}}\right] =$$

$$= -\frac{x}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{(lx)^{n-1}};$$

какъ видимъ, показатель у степени логарифма въ знаменателѣ понизился на единицу; слѣд., примѣняя этотъ способъ еще и еще, можемъ этотъ показатель обратить въ единицу.

Прим. $\int \frac{dx}{(lx)^4} = \int x\frac{dlx}{(lx)^4} = \int x d\left[-\frac{1}{3(lx)^3}\right] = \underbrace{-\frac{x}{3(lx)^3}}_{A} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(lx)^3} =$

$$= -A + \frac{1}{3}\int x\frac{dlx}{(lx)^3} = -A + \frac{1}{3}\int x d\left[-\frac{1}{2(lx)^2}\right] = \underbrace{-\left[A + \frac{x}{6(lx)^2}\right]}_{B} +$$

$$+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{(lx)^2}=-B+\frac{1}{6}\int x\frac{dlx}{(lx)^2}=-B+\frac{1}{6}\int x\,d\left[-\frac{1}{lx}\right]=$$

$$=-\frac{x}{3\,(lx)^3}-\frac{x}{6\,(lx)^2}-\frac{x}{6lx}+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{lx}.$$

69. IV. **Интегралъ** $\int x^\alpha f(lx)\,dx,$

въ которомъ f — **цѣлый многочленъ** *n'ой степени а* α — *любое (положительное или отрицательное) число,* **только не** — 1, **найдемъ интегрированіемъ по частямъ,** *подводя* x^α *подъ знакъ дифференціала:*

$$\int x^\alpha f(lx)\,dx=\int f(lx)\,d\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}=\frac{x^{\alpha+1}f(lx)}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}\int x^{\alpha+1}.f'(lx)\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^{\alpha+1}f(lx)}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}\int x^\alpha f'(lx)\,dx;$$

въ свою очередь

$$\int x^\alpha f'(lx)\,dx=\frac{x^{\alpha+1}f'(lx)}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}\int x^{\alpha+1}f''(lx)\,dx,$$

и т. д.

въ концѣ концовъ мы придемъ къ $\int x^\alpha f^{(n)}(x)\,dx$, т. е. къ $n!.\int x^\alpha\,dx$, величина коего намъ извѣстна.

Дѣлая послѣдовательную подстановку выведенныхъ только что равенствъ,

получаемъ: $\int x^\alpha f(lx)\,dx=\frac{x^{\alpha+1}f(lx)}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}\int x^\alpha f'(lx)\,dx=$

$$=\frac{x^{\alpha+1}f(lx)}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}\left[\frac{x^{\alpha+1}f'(lx)}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}\int x^\alpha f''(lx)\,dx\right]=\frac{x^{\alpha+1}f(lx)}{\alpha+1}+$$

$$-\frac{x^{\alpha+1}f'(lx)}{(\alpha+1)^2}+\frac{1}{(\alpha+1)^2}\left[\frac{x^{\alpha+1}f''(lx)}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}\int x^\alpha f'''(lx)\,dx\right]=\ldots.$$

$$=x^{\alpha+1}\left\{\frac{f(lx)}{\alpha+1}-\frac{f'(lx)}{(\alpha+1)^2}+\frac{f''(lx)}{(\alpha+1)^3}-\ldots+(-1)^n.\frac{f^{(n)}(lx)}{(\alpha+1)^n}\right\}+C,$$

т. е. $$\int x^\alpha f_n(lx)\,dx=x^{\alpha+1}F_n(lx)+C;$$

зная видъ интеграла, можемъ его искать «по способу неопредѣленныхъ коэфиціентовъ».

Замѣчаніе. Если $\alpha = -1$,

то $$\int x^{-1} f_n(lx)\,dx = \int f_n(lx)\,dlx = f_{n+1}(lx) + C.$$

Прим. $$I = \int \frac{\{2(lx)^3 - 3(lx)^2 - 4lx + 6\}\,dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

1 пріемъ — *интегрированіемъ по частямъ*:

$$I = \int \{2(lx)^3 - 3(lx)^2 - 4lx + 6\}\,d\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right) = \underbrace{\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\{2(lx)^3 - 3(lx)^2 - 4lx + 6\}}_{A} +$$

$$- \frac{3}{2}\int x^{\frac{2}{3}}.\{6(lx)^2 - 6lx - 4\}\frac{dx}{x} = A - 3\int [3(lx)^2 - 3lx - 2]\,d\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right) =$$

$$= \underbrace{A - \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}[3(lx)^2 - 3lx - 2]}_{B} + \frac{9}{2}\int x^{\frac{2}{3}}.(6lx - 3)\frac{dx}{x} = B + \frac{27}{2}\int (2lx - 1)\,d\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right) =$$

$$= B + \frac{81}{4}x^{\frac{2}{3}}(2lx - 1) - \frac{81}{2}\int x^{\frac{2}{3}}.\frac{dx}{x} = \sqrt[3]{x^2}.\{3(lx)^3 - 18(lx)^2 + 48lx - 63\} + C.$$

2 пріемъ — *по способу неопредѣленныхъ коэфиціентовъ*:

$$I = \int \frac{\{2(lx)^3 - 3(lx)^2 - 4lx + 6\}\,dx}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x^2}\{A(lx)^3 + B(lx)^2 + Dlx + E\} + C.$$

Дифференцируя, получаемъ:

$$\frac{2(lx)^3 - 3(lx)^2 - 4lx + 6}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\{A(lx)^3 + B(lx)^2 + Dlx + E\} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\{3A(lx)^2 + 2Blx + D\},$$

откуда $\frac{2}{3}A = 2$, $\frac{2}{3}B + 3A = -3$, $\frac{2}{3}D + 2B = -4$, $\frac{2}{3}E + D = 6$

и слѣд., $$A = 3,\ B = -18,\ D = 48,\ E = -63,$$

такъ что $$I = \sqrt[3]{x}\{3(lx)^3 - 18(lx)^2 + 48lx - 63\} + C.$$

70. V. 1-й частный случай — Интегралъ $\int x^{\alpha}(lx)^n\,dx$,

въ которомъ n — цѣлое положительное *число*, а α — *какое угодно*,

только не — 1, найдется интегрированіемъ по частямъ:

$$\int x^\alpha (lx)^n\,dx = \int (lx)^n\,d\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(lx)^n +$$

$$- \frac{n}{\alpha+1}\int x^{\alpha+1}(lx)^{n-1}\frac{dx}{x} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(lx)^n - \frac{n}{\alpha+1}\int x^\alpha (lx)^{n-1}\,dx = \ldots.$$

Прим. $\int x^{\frac{3}{2}}(lx)^3\,dx = \int (lx)^3\,d\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right) = \underbrace{\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}(lx)^3}_{A} - \frac{6}{5}\int x^{\frac{3}{2}}(lx)^2\,dx =$

$$= A - \frac{6}{5}\int (lx)^2\,d\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right) = \underbrace{A - \frac{12}{25}x^{\frac{5}{2}}(lx)^2}_{B} + \frac{24}{25}\int x^{\frac{3}{2}}lx\,dx =$$

$$= B + \frac{24}{25}\int lx\,d\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right) = B + \frac{48}{125}x^{\frac{5}{2}}lx - \frac{48}{125}\int x^{\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\left\{(lx)^3 - \frac{6}{5}(lx)^2 + \frac{24}{25}lx - \frac{48}{125}\right\} + C.$$

71. VI. 2-й Частный случай: если $f(x)$ — цѣлый многочленъ n'ой степени, то

$$\int f(lx)\,dx = xf'(lx) - \int x.f'(lx)\frac{dx}{x} = xf(lx) - \int f'(lx)\,dx =$$

$$= xf(lx) - xf'(lx) + \int f''(lx)\,dx = \ldots,$$

т.-е.

$$\int f(lx)\,dx = x\{f(lx) - f'(lx) + f''(lx) - f'''(lx) + \ldots + (-1)^n f^{(n)}(lx)\} + C.$$

Прим. $\int\{(lx)^5 - 2(lx)^4 + 4(lx)^2 - 1\}\,dx = x\{[(lx)^5 - 2(lx)^4 + 4(lx)^2 - 1] +$

$$- [5(lx)^4 - 8(lx)^3 + 8lx] + [20(lx)^3 - 24(lx)^2 + 8] - [60(lx)^2 - 48lx] +$$

$$+ [120lx - 48] - 120\} + C = x\{(lx)^5 - 7(lx)^4 + 28(lx)^3 - 80(lx)^2 + 160lx - 161\} + C.$$

72. VII. Интегралъ $\int \frac{x^\alpha\,dx}{(lx)^n}$, *въ которомъ* n — цѣлое положительное *число, а* α — *какое угодно*, но только не — 1, приводимъ къ $\int \frac{dy}{(ly)^n}$, положивъ

$$x^{\alpha+1} = y.$$

Дѣйствительно, тогда $(\alpha+1)x^{\alpha}dx = dy$ и $(\alpha+1)lx = ly$,

а слѣд., $$\int \frac{x^{\alpha}dx}{(lx)^n} = (\alpha+1)^{n-1}\int \frac{dy}{(ly)^n}.$$

Прим. $$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(lx-2)^2}.$$

Полагая

$$\sqrt[3]{x^2} = y, \text{ имѣемъ } x = y^{\frac{3}{2}},\ dx = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}dy,\ lx = \frac{3}{2}ly,$$

а слѣд., $$= \int \frac{\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}dy}{y^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}ly-2\right)^2} = \int y\frac{d\frac{3}{2}ly}{\left(\frac{3}{2}ly-2\right)^2} = \int yd\left[-\frac{1}{\frac{3}{2}ly-2}\right] =$$

$$= -\frac{y}{\frac{3}{2}ly-2} + \int \frac{dy}{\frac{3}{2}ly-2} = -\frac{y}{\frac{3}{2}ly-2} + \frac{2}{3}\int \frac{dy}{ly-\frac{4}{3}} = -\frac{y}{\frac{3}{2}ly-2} +$$

$$+ \frac{2}{3}e^{\frac{4}{3}}li\left(\frac{y}{e^{\frac{4}{3}}}\right) + C = -\frac{\sqrt[3]{x^2}}{lx-2} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{e^4}\,li\sqrt[3]{\frac{x^2}{e^4}} + C.$$

Замѣчаніе. Интегралъ $\int \frac{x^{-1}dx}{(lx)^n}$, т.-е. $\int \frac{dx}{x\,(lx)^n}$, *въ которомъ* n — *какое угодно число*, получается въ конечномъ видѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если $n \neq 1$, то

$$\int \frac{dx}{x\,(lx)^n} = \int \frac{dlx}{(lx)^n} = -\frac{1}{(n-1)\,(lx)^{n-1}} + C;$$

а если $n = 1$, то $$\int \frac{dx}{xlx} = \int \frac{dlx}{lx} = llx + C.$$

Прим. 1. $$\int \frac{dx}{x\,lx\,llx\,lllx} = \int \frac{dlx}{lx\,llx\,lllx} = \int \frac{dllx}{llx\,lllx} = \int \frac{dllx}{llx} = lll\,x + C.$$

Прим. 2. $$\int \frac{dx}{xlx\,(llx)^3} = \int \frac{dlx}{lx\,(llx)^3} = \int \frac{dllx}{(llx)^3} = -\frac{1}{2\,(llx)^2} + C.$$

73. VIII. **Интегралъ** $\int f_n(x)(lx)^m dx$, *въ которомъ* $f_n(x)$ — **цѣлый многочленъ** *n'ой степени, а m — любое* **цѣлое положительное** *число*, найдемъ **интегрированіемъ по частямъ**, *подводя* $f_n(x)$ *подъ знакъ дифференціала.*

Дѣйствительно, полагая

$$f_n(x) \equiv Ax^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

имѣемъ $\int f_n(x)\,dx = \frac{Ax^{n+1}}{n+1} + \frac{A_1 x^n}{n} + \ldots + \frac{A_{n-1} x^2}{2} + A_n x =$

$$= x\left\{\frac{Ax^n}{n+1} + \frac{A_1 x^{n-1}}{n} + \ldots + \frac{A_{n-1} x}{2} + A_n\right\} = x\varphi_n(x)$$

и, слѣд., $$f_n(x)\,dx = d\,[x\varphi_n(x)],$$

а потому $\int f_n(x)\,(lx)^m\,dx = \int (lx)^n\,d\,[x\varphi_n(x)] = x\varphi_n(x)\,(lx)^m +$

$$- m\int x\varphi_n(x)\,.\,(lx)^{m-1}\,\frac{dx}{x} = x\varphi_n(x)\,(lx)^m - m\int \varphi_n(x)\,(lx)^{m-1}\,dx;$$

послѣдній интегралъ — того-же вида, какъ и искомый, но проще — степень (lx) въ немъ на единицу ниже; поэтому, продолжая такъ-же и дальше, придемъ къ $\int \omega_n(x)\,dx$, а его найти умѣемъ.

Прим. $\int (81x^2 - 16x + 11)\,(lx)^3\,dx = \int (lx)^3\,d\,[27x^3 - 8x^2 + 11x] =$

$$= \underbrace{(27x^3 - 8x^2 + 11x)\,(lx)^3}_{A} - 3\int (27x^3 - 8x^2 + 11x)\,.\,(lx)^2\,\frac{dx}{x} =$$

$$= A - 3\int (27x^2 - 8x + 11)\,(lx)^2\,dx = A - 3\int (lx)^2\,d\,(9x^3 - 4x^2 + 11x) =$$

$$= \underbrace{A - 3\,(9x^3 - 4x^2 + 11x)}_{B} + 6\int (9x^3 - 4x^2 + 11x)\,.\,lx\,\frac{dx}{x} =$$

$$= B + 6\int (9x^2 - 4x + 11)\,lx\,dx = B + 6\int lx\,d\,(3x^3 - 2x^2 + 11x) =$$

$$= \underbrace{B + 6\,(3x^3 - 2x^2 + 11x)}_{D} - 6\int (3x^3 - 2x^2 + 11x)\,.\,\frac{dx}{x} =$$

$$= D - 6\int (3x^2 - 2x + 11)\,dx = D - 6\,(x^3 - x^2 + 11x) + C.$$

74. IX. **Интегралъ** $\int f_n(x)\,l\,[\varphi(x)]\,dx$, *въ которомъ* $\varphi(x)$ — **раціональная** *функція*, найдемъ помощью *интегрированія по*

частямъ, подводя $f_n(x)$ *подъ знакъ дифференціала*; при этомъ, если $\varphi(x)$ есть дробь, то слѣдуетъ воспользоваться теоремой о логариѳмѣ дроби.

Прим.

$$\int (x^3+x^2)\, l\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right] dx = \int l\frac{x^2+1}{x^2-1}\, d\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right) = \underbrace{\frac{3x^4+4x^3}{12}\, l\frac{x^2+1}{x^2-1}}_{A} +$$

$$-\int \frac{3x^4+4x^3}{12}\, dl\frac{x^2+1}{x^2-1} = A - \int \frac{3x^4+4x^3}{12}\, d\left[l(x^2+1) - l(x^2-1)\right] =$$

$$= A - \frac{1}{12}\int \frac{3x^4+4x^3}{x^2+1}\, 2x dx + \frac{1}{12}\int \frac{3x^4+4x^3}{x^2-1}\, 2x dx =$$

$$= A - \frac{1}{6}\int \left\{3x^3+4x^2-3x-4+\frac{3x+4}{x^2+1}\right\} dx +$$

$$+\frac{1}{6}\int \left\{3x^3+4x^2+3x+4+\frac{3x+4}{x^2-1}\right\} dx = A + \frac{1}{3}\int (3x+4)\, dx +$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{x dx}{x^2+1} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{12}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{7}{12}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= \frac{3x^4+4x^3-3}{12}\, l\frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{3x^2+8x}{6} - \frac{2}{3}\operatorname{Arctg} x + \frac{1}{3}\, l\frac{x-1}{x+1} + C.$$

75. X. **Интегралъ** $\int \frac{l\varphi(x)}{(x-a)^n} dx$, *въ которомъ* $\varphi(x)$ *— раціональная функція, а* n *— любое* **цѣлое** *положительное число,* **не равное 1,** *найдемъ интегрированіемъ по частямъ съ подведеніемъ* $(x-a)^n$ *подъ знакъ дифференціала.*

Прим. $\int l\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right] \frac{dx}{(x-3)^3} = \int l\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right] d\left[-\frac{1}{2(x-3)^2}\right] =$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2(x-3)^2}\, l\frac{x^2+1}{x^2-1}}_{A} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-3)^2}\left\{\frac{2x dx}{x^2+1} - \frac{2x dx}{x^2-1}\right\} =$$

$$= A - 2\int \frac{x}{(x-3)^2(x^2-1)(x^2+1)}\, dx = A - \frac{3}{40}\int \frac{dx}{(x-3)^2} +$$

$$+\frac{61}{800}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{32}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{50}\int \frac{4x-3}{x^2+1}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2(x-3)^2}\, l\frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{3}{40(x-3)} + \frac{61}{800}\, l(x-3) - \frac{1}{8}\, l(x-1) +$$

$$-\frac{1}{32}\, l(x+1) + \frac{1}{25}\, l(x^2+1) - \frac{3}{50}\operatorname{Arctg} x + C.$$

§ 3. Показательныя функціи.

76. I. Въ слѣдующихъ случаяхъ показательныя функціи интегрируются **непосредственно:**

$$\int e^x\,dx = e^x + C;\quad \int e^{\alpha x}\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C;$$

$$\int a^{\alpha x}\,dx = \int (e^{la})^{\alpha x}\,dx = \int e^{la.\alpha x}\,dx = \frac{e^{la.\alpha x}}{la.\alpha} + C = \frac{a^{\alpha x}}{ala} + C.$$

77. II. **Интегралъ** $\int f_n(x)\,e^{\alpha x}\,dx$ найдемъ, *интегрируя по частямъ:*

$$\int f_n(x)\,e^{\alpha x}\,dx = \int f_n(x)\,d\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} f_n(x) - \frac{1}{\alpha}\int f'_n(x)\,e^{\alpha x}\,dx =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} f_n(x) - \frac{1}{\alpha}\int f'_n(x)\,d\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} f_n(x) - \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} f'_n(x) +$$

$$+ \frac{1}{\alpha^2}\int f''_n(x)\,e^{\alpha x}\,dx = \ldots.;$$

слѣд.,

$$\int f_n(x)\,e^{\alpha x}\,dx = \left\{f_n(x) - \frac{f'_n(x)}{\alpha} + \frac{f''_n(x)}{\alpha^2} - \ldots. + (-1)^n \frac{f_n^{(n)}(x)}{\alpha^n}\right\}\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C.$$

Какъ видимъ, *интегралъ произведенія показательной функціи на цѣлый многочленъ равенъ произведенію этой-же показательной функціи на цѣлый многочленъ той-же степени; зная* **видъ интеграла,** *можемъ искать его* **«по способу неопредѣленныхъ коэфиціентовъ».**

Прим. Найти $I = \int (4x^3 + 8x^2 - 6x + 2)\,e^{2x}\,dx.$

1-й пріемъ — *наизусть:*

$$I = \left\{(4x^3 + 8x^2 - 6x + 2) - \frac{12x^2 + 16x - 6}{2} + \frac{24x + 16}{2^2} - \frac{24}{2^3}\right\}\frac{e^{2x}}{2} + C =$$

$$= (2x^3 + x^2 - 4x + 3)\,e^{2x} + C.$$

2-й пріемъ — *интегрированіемъ по частямъ*:

$$I = \int (2x^3 + 4x^2 - 3x + 1)\, d(e^{2x}) = (2x^3 + 4x^2 - 3x + 1)\, e^{2x} +$$

$$- \int (6x^2 + 8x - 3)\, e^{2x}\, dx = (2x^3 + 4x^2 - 3x + 1)\, e^{2x} - \int \left(3x^2 + 4x - \frac{3}{2}\right) d(e^{2x}) =$$

$$= \left(2x^3 + x^2 - 7x + \frac{5}{2}\right) e^{2x} + \int (6x + 4)\, e^{2x}\, dx = \left(2x^3 + x^2 - 7x + \frac{5}{2}\right) e^{2x} +$$

$$+ \int (3x + 2)\, d(e^{2x}) = \left(2x^3 + x^2 - 4x + \frac{9}{2}\right) e^{2x} - \int 3e^{2x}\, dx = (2x^3 + x^2 - 4x + 3)\, e^{2x} + C.$$

3-й пріемъ — *по способу неопредѣленныхъ коэфиціентовъ*:

$$I = \int (4x^3 + 8x^2 - 6x + 2)\, e^{2x}\, dx = (Ax^3 + Bx^2 + Dx + E)\, e^{2x} + C;$$

слѣд.,

$$(4x^3 + 8x^2 - 6x + 2)\, e^{2x} = \{2(Ax^3 + Bx^2 + Dx + E) + (3Ax^2 + 2Bx + D)\}\, e^{2x},$$

откуда $2A = 4,\ 3A + 2B = 8,\ 2B + 2D = -6,\ D + 2E = 2,$

т.-е. $A = 2,\ B = 1,\ D = -4,\ E = 3,$

и, значитъ, $I = (2x^3 + x^2 - 4x + 3)\, e^{2x} + C.$

78. III. **Интегралъ** $\int \frac{e^{\alpha x}\, dx}{x^n}$, *въ которомъ* n — **число цѣлое,** *приводится къ интегральному логариѳму* помощью положенія

$$e^{\alpha x} = y.$$

Дѣйствительно, тогда $\alpha x = ly, \quad \alpha dx = \frac{dy}{y}$

и, слѣд., $$\int \frac{e^{\alpha x}\, dx}{x^n} = \alpha^{n-1} \int \frac{dy}{(ly)^n}.$$

Такъ-же преобразовывается и $\int \frac{e^{\alpha x}\, dx}{(x-a)^n}$.

Прим. $$I = \int \frac{e^{3x}\, dx}{(x-1)^3}.$$

Полагая $e^{3x} = y,$ получаемъ: $3x = ly,\ 3dx = \frac{dy}{y}$

и, слѣд., $I=\int\frac{9dy}{(ly-3)^3}=9\int y\frac{dly}{(ly-3)^3}=9\int yd\left[-\frac{1}{2(ly-3)^2}\right]=$

$$=\underbrace{-\frac{9y}{2(ly-3)^2}}_{A}+\frac{9}{2}\int\frac{dy}{(ly-3)^2}=A+\frac{9}{2}\int yd\left[-\frac{1}{ly-3}\right]=$$

$$=\underbrace{A-\frac{9y}{2(ly-3)}}_{B}+\frac{9}{2}\int\frac{dy}{ly-3}=B+\frac{9}{2}e^3\int\frac{d\left(\frac{y}{e^3}\right)}{l\left(\frac{y}{e^3}\right)}=B+\frac{9}{2}e^3\,li\left(\frac{y}{e^3}\right)+C=$$

$$=-\frac{e^{3x}}{2(x-1)^2}-\frac{3e^{3x}}{2(x-1)}+\frac{9e^3}{2}li\,(e^{3x-3})+C.$$

§ 4. Функціи тригонометрическихъ сложныхъ чиселъ.

79. I. **Случаи непосредственнаго интегрированія:**

$$\int\sin xdx=-\cos x+C,\quad \int\cos xdx=\sin x+C.$$

$$\int\sin\alpha xdx=-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}+C,\quad \int\cos\alpha xdx=\frac{\sin\alpha x}{\alpha}+C.$$

$$\int\sin x\cos xdx=\int\sin xd\sin x=\frac{\sin^2x}{2}+C=$$

$$=\int\cos xd(-\cos x)=-\frac{\cos^2x}{2}+C_1.$$

$$\int\operatorname{tg}xdx=\int\frac{\sin xdx}{\cos x}=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}=-l\cos x+C.$$

$$\int\operatorname{cotg}xdx=\int\frac{\cos xdx}{\sin x}=\int\frac{d\sin x}{\sin x}=l\sin x+C.$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2x}=-\operatorname{cotg}x+C,\quad \int\frac{dx}{\cos^2x}=\operatorname{tg}x+C.$$

$$\int\operatorname{tg}x\sec xdx=\sec x+C,\quad \int\operatorname{cotg}x\operatorname{cosec}xdx=-\operatorname{cosec}x+C.$$

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2x}}{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}dx=\int\frac{d\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x}=l\operatorname{tg}x+C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = l \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

80. Дальше мы сначала разсмотримъ тѣ случаи, когда x входитъ въ подъинтегральное выраженіе лишь подъ знаками тригонометрическихъ функцій. Такъ какъ

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ и } \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},$$

то, значитъ, наиболѣе общій видъ такого интеграла будетъ

$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx.$$

81. II. **Частный случай:** $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$.

Проще всего онъ находится введеніемъ вспомогательнаго *постояннаго* угла α, опредѣляемаго ур-ніями:

$$a = r \cos \alpha, \quad b = r \sin \alpha,$$

откуда $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\cos \alpha = \frac{a}{r}$ и $\sin \alpha = \frac{b}{r}$;

дѣйствительно, тогда $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{r} \int \frac{dx}{\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha} =$

$$= \frac{1}{r} \int \frac{dx}{\sin(x + \alpha)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} l \operatorname{tg} \frac{x + \alpha}{2} + C.$$

Прим. $I = \int \frac{dx}{12 \sin x - 5 \cos x}$.

Полагая $12 = r \cos \alpha, \; 5 = r \sin \alpha,$

имѣемъ: $r = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ и, слѣд., $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\sin\alpha = \frac{5}{13}$;

въ то-же время

$$I = \frac{1}{13}\int \frac{dx}{\sin x\cos\alpha - \cos x\sin\alpha} = \frac{1}{13}\int \frac{dx}{\sin(x-\alpha)} = \frac{1}{13} l\operatorname{tg}\frac{x-\alpha}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{13} l\left[\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right] = \frac{1}{13} l\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{5}{25}}{1 + \frac{5}{25}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C = \frac{1}{13} l\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}{5 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$$

82. II. $\int \varphi(\sin x, \cos x)\,dx$, *когда функція* φ — **раціональна,** приводится къ *интегралу раціональной алгебрической дроби,* если **tg половины x'а** *примемъ за новую перемѣнную.*

Дѣйствительно, полагая $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$,

имѣемъ: $\sec^2\frac{x}{2} = 1 + z^2$, $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+z^2}$, $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{z^2}{1+z^2}$;

и такъ какъ $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$,

то, слѣд., $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ . . . . . (1);

кромѣ того, $x = \operatorname{Arctg} z$ и, значитъ, $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$ . . . . . (2),

а потому

$$\int \varphi(\sin x, \cos x)\,dx = \int \varphi\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2} = \int \Phi(z)\,dz,$$

при чемъ $\Phi(z)$ — раціональна.

(Для облегченія запоминанія формулъ (1) и (2) замѣтимъ, что выраженіе для $\sin x$ получается изъ выраженія для dx лишь замѣной въ числителѣ dz на z, и что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

Прим. Найти $I = \int \frac{\sin x + \cos x}{8\cos x + 3\sin^2 x}\,dx.$

Полагая $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z,$

имѣемъ: $x=2\operatorname{Arctg} z,\ dx=\frac{2dz}{1+z^2},\ \sin x=\frac{2z}{1+z^2}$ и $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2},$

а слѣд.,

$$I=2\int\frac{2z+(1-z^2)}{8(1-z^4)+3(2z)^2}dz=2\int\frac{z^2-2z-1}{8z^4-12z^2-8}dz=\int\frac{z^2-2z-1}{\left(2z^2-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}}dz=$$

$$=\int\frac{z^2-2z-1}{(2z^2-4)(2z^2+1)}dz=\int\frac{\sqrt{2}-4}{40(z-\sqrt{2})}dz-\int\frac{\sqrt{2}+4}{40(z+\sqrt{2})}dz+$$

$$+\int\frac{4z+3}{10(2z^2+1)}dz=\frac{\sqrt{2}-4}{40}l(z-\sqrt{2})-\frac{\sqrt{2}+4}{40}l(z+\sqrt{2})+$$

$$+\frac{1}{10}l(2z^2+1)+\frac{3\sqrt{2}}{20}\operatorname{Arctg}(z\sqrt{2})+C=\frac{\sqrt{2}}{40}l\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{2}}+$$

$$-\frac{1}{10}l\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\right)+\frac{1}{10}l\left(2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right)+\frac{3\sqrt{2}}{20}\operatorname{Arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

83. IV. Если въ $\int\varphi(\sin x,\cos x)\,dx$ *функція* $\varphi(\sin x,\cos x)$, *раціональная относительно* $\sin x$ *и* $\cos x$, *содержитъ ихъ* **лишь въ четныхъ степеняхъ**, *либо* можетъ быть преобразована такъ, что $\sin x$ *и* $\cos x$ *будутъ входить* **лишь черезъ посредство** tg x, то интегралъ найдемъ, принявъ tg **самого** x'а *за новую перемѣнную.*

Дѣйствительно, полагая $\operatorname{tg}x=z,$

имѣемъ: $\cos^2x=\frac{1}{\sec^2x}=\frac{1}{1+z^2},\ \sin^2x=\operatorname{tg}^2x\cos^2x=\frac{z^2}{1+z^2}$

и $$dx=d\operatorname{Arctg}z=\frac{dz}{1+z^2},$$

а слѣд.,

$$\int\varphi(\sin^2x,\cos^2x)\,dx=\int\varphi\left[\frac{z^2}{1+z^2},\ \frac{1}{1+z^2}\right]\frac{dz}{1+z^2}=\int\Phi(z)\,dz$$

и $$\int\omega(\operatorname{tg}x)\,dx=\int\omega(z)\frac{dz}{1+z^2}=\int\Omega(z)\,dz,$$

гдѣ $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ суть функціи раціональныя.

Прим. 1. $$I=\int\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx.$$

Полагая $$\operatorname{tg} x=z,$$

получаемъ: $$I=\int\frac{z^2-1}{z^4+1}\,dz=\int\frac{(z^2-1)\,dz}{z^4+2z^2+1-2z^2}=$$

$$=\int\frac{(z^2-1)\,dz}{(z^2+1)^2-(z\sqrt{2})^2}=-\frac{1}{2}\int\frac{(\sqrt{2}z+1)\,dz}{z^2+z\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2}\int\frac{(\sqrt{2}z-1)\,dz}{z^2-z\sqrt{2}+1}=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{(2z+\sqrt{2})\,dz}{z^2+z\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{(2z-\sqrt{2})\,dz}{z^2-z\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}\,l\,\frac{z^2-z\sqrt{2}+1}{z^2+z\sqrt{2}+1}+C=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\,l\,\frac{\operatorname{tg}^2 x-\sqrt{2}\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg}^2 x+\sqrt{2}\operatorname{tg} x+1}+C=\frac{\sqrt{2}}{4}\,l\,\frac{1-\sqrt{2}\sin x\cos x}{1+\sqrt{2}\sin x\cos x}+C.$$

Прим. 2. $$I=\int\frac{\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x}{\sin^3 x-\cos^3 x}\,dx.$$

Такъ какъ можемъ написать, что $I=\int\frac{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^3 x-1}\,dx,$

то полагаемъ $\operatorname{tg} x=z,$ откуда $dx=\frac{dz}{z^2+1};$

тогда

$$I=\int\frac{z^2+z}{z^3-1}\,\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z-1}+\frac{1}{3}\int\frac{(2z+1)\,dz}{z^2+z+1}-\int\frac{z\,dz}{z^2+1}=\frac{1}{3}\,l\,(z-1)+$$

$$+\frac{1}{3}\,l\,(z^2+z+1)-\frac{1}{2}\,l\,(z^2+1)+C=\frac{1}{3}\,l\,(z^3-1)-\frac{1}{2}\,l\,(z^2+1)+C=$$

$$=\frac{1}{6}\,l\,\frac{(\operatorname{tg}^3 x-1)^2}{(\operatorname{tg}^2 x+1)^3}+C=\frac{1}{6}\,l\,\frac{(\sin^3 x-\cos^3 x)^2}{(\sin^2 x+\cos^2 x)^3}+C=\frac{1}{3}\,l\,(\sin^3 x-\cos^3 x)+C.$$

Прим. 3. Полагая $tgx=z$ и, слѣд., $x=\operatorname{Arctg} z,\ dx=\frac{dz}{z^2+1},$

получаемъ: $$\int\operatorname{tg}^5 x\,dx=\int z^5\,\frac{dz}{z^2+1}=\int\frac{z^5}{z^2+1}\,dz=\int\left(z^3-z+\frac{z}{z^2+1}\right)dz=$$

$$=\frac{z^4}{4}-\frac{z^2}{2}+\frac{1}{2}\,l\,(z^2+1)+C=\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\frac{1}{2}\,l\sec^2 x+C=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-l\cos x+C.$$

Прим. 4. Такъ какъ $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^4 x} = \int \operatorname{Cotg}^4 x dx,$

то полагаемъ $\operatorname{Cotg} x = z;$

тогда $x = \operatorname{Arccotg} z$ и $dx = -\frac{dz}{z^2+1},$

а слѣд., $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^4 x} = -\int z^4 \frac{dz}{z^2+1} = -\int \frac{z^4}{z^2+1} dz = -\int \left(z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1}\right) dz =$

$$= -\frac{z^3}{3} + z + \operatorname{Arccotg} z + C = -\frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} + \operatorname{cotg} x + x + C.$$

84. V. **Интегралы** $\int \operatorname{tg}^n x$ и $\int \operatorname{cotg}^n x dx$, въ которыхъ n — *число цѣлое и положительное*, можно искать, и не вводя новой перемѣнной, а *понижая постепенно показатель степени, помощью интегрированія по частямъ*, пользуясь для этого равенствомъ

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Именно,

$$\int \operatorname{tg}^n x dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \frac{dx}{\cos^2 x} +$$

$$- \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x d \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx$$

и точно такъ-же $\int \operatorname{cotg}^n x dx = \int \operatorname{cotg}^{n-2} x (\operatorname{cosec}^2 x - 1) dx =$

$$= \int \operatorname{cotg}^{n-2} x \operatorname{cosec}^2 x dx - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x dx =$$

$$= -\int \operatorname{cotg}^{n-2} x d \operatorname{cotg} x - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x dx = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x dx.$$

Примѣняя этотъ пріемъ еще и еще, придемъ, наконецъ, въ 1-мъ случаѣ: либо (когда n — нечетное) къ $\int \operatorname{tg} x dx$, равному $-l \cos x + C$, либо (когда n — четное) къ $\int dx$; а во второмъ: либо (при n — нечетномъ) къ $\int \operatorname{cotg} x dx$, равному $l \sin x + C$, либо (при n — четномъ) къ $\int dx$.

Замѣчаніе. Такъ какъ $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{cotg} x$ и $\frac{1}{\operatorname{cotg} x} = \operatorname{tg} x,$

то очевидно, указанный методъ примѣнимъ, при n — цѣломъ, и къ

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^n x} \text{ и } \int \frac{dx}{\operatorname{cotg}^n x}.$$

Прим. 1. $\int \operatorname{tg}^5 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x (\sec^2 x - 1) dx = \int \operatorname{tg}^3 x d \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^3 x dx =$

$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x (\sec^2 x - 1) dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x d \operatorname{tg} x + \int \operatorname{tg} x dx =$

$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - l \cos x + C.$

Прим. 2. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^4 x} = \int \operatorname{cotg}^4 x dx = \int \operatorname{cotg}^2 x (\operatorname{cosec}^2 x - 1) dx =$

$= - \int \operatorname{cotg}^2 x d \operatorname{cotg} x - \int \operatorname{cotg}^2 x dx = - \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} - \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1) dx =$

$= - \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} + \int d \operatorname{cotg} x + \int dx = - \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} + \operatorname{cotg} x + x + C.$

85. VI. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ *при* m *и* n **цѣлыхъ**, т.-е. *интегралъ произведенія цѣлыхъ, положительныхъ или отрицательныхъ, степеней* $\sin x$ *и* $\cos x$ найдемъ, *понижая постепенно показатели этихъ степеней помощью интегрированія по частямъ*, если **хоть одинъ** *изъ этихъ показателей* **положителенъ**; въ противномъ случаѣ *помножаемъ предварительно подъинтегральную функцію на* $\sin^2 x + \cos^2 x$ *(т.-е. на* **1***) и разбиваемъ интегралъ на два*, съ каждымъ изъ коихъ поступаемъ, какъ только что сказано. При этомъ, интегрируя по частямъ, надо наблюдать, чтобы $\sin x$ или $\cos x$ *не были отчасти подъ знакомъ дифференціала, а отчасти внѣ его;* кромѣ того, надо помнить, что *положительный показатель понижается отъ дифференцированія степени, а отрицательный* — отъ интегрированія, т.-е. *при подведеніи степени подъ знакъ дифференціала.*

Прим. 1. $I = \int \sin^4 x dx = \int \sin^3 x . \sin x dx = - \int \sin^3 x d \cos x =$

$= \underbrace{- \sin^3 x \cos x + 3 \int \cos x . \sin^2 x \cos x dx}_{A} = A + 3 \int \sin^2 x \cos^2 x dx;$

замѣняя $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, имѣемъ:

$I = A + 3 \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) dx = A + 3 \int \sin^2 x dx - 3 \int \sin^4 x dx;$

перенеся послѣдній членъ въ лѣвую часть, получаемъ:

$$4I = A + 3\int \sin^2 x\,dx, \quad \text{откуда} \quad I = \frac{A}{4} + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx.$$

Затѣмъ $J = \int \sin^2 x\,dx = \int \sin x . \sin x\,dx = -\int \sin x\, d\cos x =$

$$= \underbrace{-\sin x \cos x}_{B} + \int \cos x . \cos x\,dx = B + \int \cos^2 x\,dx = B + \int (1 - \sin^2 x)\,dx =$$

$$= B + \int dx - \int \sin^2 x\,dx = B + x - J + C,$$

откуда $2J = B + x + C$ и, слѣд., $J = \frac{B}{2} + \frac{x}{2} + C_1,$

а потому $I = -\frac{\sin^3 x \cos x}{4} - \frac{3 \sin x \cos x}{8} + \frac{3x}{8} + C'.$

Прим. 2. $I = \int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x . \cos x\,dx = \int \cos^4 x\, d\sin x =$

$$= \underbrace{\sin x \cos^4 x}_{A} + 4\int \sin x . \cos^3 x \sin x\,dx = A + 4\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx =$$

$$= A + 4\int (1 - \cos^2 x)\cos^3 x\,dx = A + 4\int \cos^3 x\,dx - 4\int \cos^5 x\,dx$$

и, слѣд., $5I = A + 4\int \cos^3 x\,dx,$ а $I = \frac{A}{5} + \frac{4}{5}\int \cos^3 x\,dx.$

Затѣмъ $J = \int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cos x\,dx = \int \cos^2 x\, d\sin x = \underbrace{\sin x \cos^2 x}_{B} +$

$$+ 2\int \sin x . \cos x \sin x\,dx = B + 2\int \sin^2 x . \cos x\,dx = B + 2\int \sin^2 x\, d\sin x =$$

$$= B + \frac{2 \sin^3 x}{3} + C,$$

а потому, $I = \frac{\sin x \cos^4 x}{5} + \frac{4 \sin x \cos^2 x}{5} + \frac{8 \sin^3 x}{15} + C'.$

Прим. 3. $I = \int \sin^4 x \cos^2 x\,dx = \int \sin^3 x \cos^2 x . \sin x\,dx =$

$$= -\int \sin^3 x . \cos^2 x\, d\cos x = -\int \sin^3 x\, d\frac{\cos^3 x}{3} = \underbrace{-\frac{\sin^3 x \cos^3 x}{3}}_{A} +$$

$$+\frac{3}{3}\int \cos^3 x.\sin^2 x\cos x dx = A + \int \sin^2 x\cos^4 x dx = A +$$

$$+\int \sin^2 x\cos^2 x(1-\sin^2 x)\,dx = A + \int \sin^2 x\cos^2 x dx - \int \sin^4 x\cos^2 x dx,$$

откуда $2I = A + \int \sin^2 x\cos^2 x dx, \quad I = \frac{A}{2} + \frac{1}{2}\int \sin^2 x\cos^2 x dx.$

Затѣмъ $J = \int \sin^2 x\cos^2 x dx = \int \sin^2 x\cos x d\sin x = \int \cos x d\frac{\sin^3 x}{3} =$

$$= \underbrace{\frac{\sin^3 x\cos x}{3}}_{B} + \frac{1}{3}\int \sin^3 x.\sin x dx = B + \frac{1}{3}\int \sin^4 x dx =$$

$$= B + \frac{1}{3}\int \sin^2 x(1-\cos^2 x)\,dx = B + \frac{1}{3}\int \sin^2 x dx - \frac{1}{3}\int \sin^2 x\cos^2 x dx,$$

откуда $\frac{4}{3}J = B + \frac{1}{3}\int \sin^2 x dx, \quad J = \frac{3B}{4} + \frac{1}{4}\int \sin^2 x dx;$

наконецъ, $K = \int \sin^2 x dx = \underbrace{-\sin x\cos x}_{D} + \int \cos^2 x dx =$

$$= D + \int (1-\sin^2 x)\,dx = D + x - \int \sin^2 x dx,$$

откуда $2K = D + x + C, \quad K = \frac{D}{2} + \frac{x}{2} + C_1;$

значитъ, окончательно:

$$I = -\frac{\sin^3 x\cos^3 x}{6} + \frac{\sin^3 x\cos x}{8} - \frac{\sin x\cos x}{16} + \frac{x}{16} + C'.$$

Прим. 4. $\int \frac{\cos^4 x dx}{\sin^6 x} = \int \cos^3 x\frac{\cos x dx}{\sin^6 x} = \int \cos^3 x\frac{d\sin x}{\sin^6 x} =$

$$= -\int \cos^3 x\, d\frac{1}{5\sin^5 x} = \underbrace{-\frac{\cos^3 x}{5\sin^5 x}}_{A} - \frac{3}{5}\int \frac{\cos^2 x\sin x dx}{\sin^5 x} = A - \frac{3}{5}\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^4 x} =$$

$$= A - \frac{3}{5}\int \cos x\frac{d\sin x}{\sin^4 x} = A + \frac{3}{5}\int \cos x d\frac{1}{3\sin^3 x} = \underbrace{A + \frac{\cos x}{5\sin^3 x}}_{B} +$$

$$+\frac{1}{5}\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x} = B + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\cos^3 x}{5\sin^5 x} + \frac{\cos x}{5\sin^3 x} - \frac{1}{5}\operatorname{cotg} x + C.$$

Прим. 5. $$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^5 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x\,dx}{\sin^5 x} + \int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^5 x} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^3 x} + \int \cos x \frac{d\sin x}{\sin^5 x} = \int \frac{dx}{\sin^3 x} + \int \cos x\,d\left[-\frac{1}{4\sin^4 x}\right] = \int \frac{dx}{\sin^3 x} +$$

$$\underbrace{-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}}_{A} - \frac{1}{4}\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^4 x} = A + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\sin^3 x} = A + \frac{3}{4}\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x}\,dx =$$

$$= A + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\sin x} + \frac{3}{4}\int \cos x \frac{d\sin x}{\sin^3 x} = A + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\sin x} +$$

$$+ \frac{3}{4}\int \cos x\,d\left[-\frac{1}{2\sin^2 x}\right] = A + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\sin x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} - \frac{3}{8}\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8} l \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Прим. 6. $$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^4 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \sin x \frac{-d\cos x}{\cos^4 x} + \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + \int \sin x\,d\frac{1}{3\cos^3 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x + \frac{\sin x}{3\cos^3 x} - \frac{1}{3}\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^3 x} = \frac{2}{3}\operatorname{tg} x + \frac{\sin x}{3\cos^3 x} + C.$$

Прим. 7. $$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x \cos^3 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x\,dx}{\sin^4 x \cos^3 x} +$$

$$+ \int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^4 x \cos^3 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x} + \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^3 x}\,dx +$$

$$+ \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x \cos x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^3 x} + 2\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} + \int \frac{\cos x\,dx}{\sin^4 x} =$$

$$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x}\,dx + 2\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos x}\,dx + \int \frac{d\sin x}{\sin^4 x} = \int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^3 x} + 3\int \frac{dx}{\cos x} +$$

$$+ 2\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} - \frac{1}{3\sin^3 x} = \int \sin x \frac{-d\cos x}{\cos^3 x} + \underbrace{3l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x}}_{A} =$$

$$= A + \int \sin x\,d\frac{1}{2\cos^2 x} = A + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \frac{5}{2} l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) +$$

$$- \frac{2}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + C.$$

Прим. 8. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} +$

$$+ \int \frac{dx}{\sin^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + 2 \int \frac{dx}{\sin^2 x} +$$

$$+ \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^4 x} = \underbrace{\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{cotg} x}_{A} + \int \cos x \frac{d \sin x}{\sin^4 x} = A + \int \cos x d \left[-\frac{1}{3 \sin^3 x} \right] =$$

$$= A - \frac{\cos x}{3 \sin^3 x} - \frac{1}{3} \int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x} = \operatorname{tg} x - \frac{5}{3} \operatorname{cotg} x - \frac{\cos x}{3 \sin^3 x} + C.$$

Прим. 9. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^3 x} dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\sin x \cos x} =$

$$= - \int \frac{d \cos x}{\cos^3 x} + \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} dx = \frac{1}{2 \cos^2 x} + \int \frac{\sin x dx}{\cos x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin x} =$$

$$= \frac{1}{2 \cos^2 x} - l \cos x + l \sin x + C.$$

Прим. 10. $I = \int \frac{\cos^8 x dx}{\sin^4 x} = \int \cos^7 x \frac{d \sin x}{\sin^4 x} = \int \cos^7 x d \left[-\frac{1}{3 \sin^3 x} \right] =$

$$= \underbrace{-\frac{\cos^7 x}{3 \sin^3 x}}_{A} - \frac{7}{3} \int \frac{\cos^6 x \sin x dx}{\sin^3 x} = A - \frac{7}{3} \int \frac{\cos^6 x dx}{\sin^2 x} = A - \frac{7}{3} \int \cos^5 x \frac{d \sin x}{\sin^2 x} =$$

$$= A + \frac{7}{3} \int \cos^5 x d \frac{1}{\sin x} = \underbrace{A + \frac{7 \cos^5 x}{3 \sin x}}_{B} + \frac{35}{3} \int \frac{\cos^4 x \sin x dx}{\sin x} = B + \frac{35}{3} J,$$

где

$$J = \int \cos^4 x dx = \int \cos^3 x d \sin x = \underbrace{\sin x \cos^3 x}_{D} + 3 \int \sin x \cos^2 x \sin x dx =$$

$$= D + 3 \int \sin^2 x \cos^2 x dx = D + 3 \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x dx = D + 3 \int \cos^2 x dx - 3J$$

отсюда $4J = D + 3 \int \cos^2 x dx; \quad J = \frac{D}{4} + \frac{3}{4} \int \cos^2 x dx;$

затѣмъ $K = \int \cos^2 x dx = \int \cos x d \sin x = \underbrace{\sin x \cos x}_{E} + \int \sin^2 x dx =$

$$= E + \int (1 - \cos^2 x) dx = E + \int dx - \int \cos^2 x dx,$$

откуда $2K = E + x + C, \quad K = \frac{E}{2} + \frac{x}{2} + C_1,$

а $$I = -\frac{\cos^7 x}{3\sin^3 x} + \frac{7\cos^5 x}{3\sin x} + \frac{35\sin x\cos^3 x}{12} + \frac{35\sin x\cos x}{8} + \frac{35x}{8} + C'.$$

Прим. 11. $$\int \frac{\sin^6 x dx}{\cos^3 x} = \int \sin^5 x \frac{-d\cos x}{\cos^3 x} = \int \sin^5 x d\frac{1}{2\cos^2 x} =$$

$$= \underbrace{\frac{\sin^5 x}{2\cos^2 x}}_{A} - \frac{5}{2}\int \frac{\sin^4 x\cos x dx}{\cos^2 x} = A - \frac{5}{2}\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos x} =$$

$$= A - \frac{5}{2}\int \sin^2 x \frac{(1-\cos^2 x)dx}{\cos x} = A - \frac{5}{2}\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos x} + \frac{5}{2}\int \sin^2 x\cos x dx =$$

$$= A - \frac{5}{2}\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} dx + \frac{5}{2}\int \sin^2 x d\sin x = A - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\cos x} + \frac{5}{2}\int \cos x dx +$$

$$+ \frac{5\sin^3 x}{6} = \frac{\sin^5 x}{2\cos^2 x} - \frac{5}{2} l\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{5\sin x}{2} + \frac{5\sin^3 x}{6} + C.$$

86. VII. **Первый частный случай.** *Если въ* $\int \sin^m x\cos^n x dx$ *показатель одного изъ чиселъ* $\sin x$, $\cos x$ **положительный нечетный,** то проще всего этотъ интегралъ найдемъ, **принимая другое изъ этихъ чиселъ за новую перемѣнную.**

Дѣйствительно, если, напримѣръ, $n = 2k + 1$, то, полагая $\sin x = y$, имѣемъ, что

$$\int \sin^m x\cos^n x dx = \int \sin^m x . \cos^{2k} x . \cos x dx =$$

$$= \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^k d\sin x = \int y^m (1-y^2)^k dy,$$

послѣ чего остается лишь развернуть $(1-y^2)^k$ по формулѣ бинома Ньютона.

Прим. 1. $$\int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x . \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x)^2 d\cos x =$$

$$= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) d\cos x = -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

Прим. 2. $$\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\sin^4 x . \sin x dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{(1-\cos^2 x)^2 d\cos x}{\cos^2 x} =$$

$$= -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} + 2\int d\cos x - \int \cos^2 x d\cos x = \frac{1}{\cos x} + 2\cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Прим. 3. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^6 x} = \int \frac{\cos^2 x \cos x dx}{\sin^6 x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x) d \sin x}{\sin^6 x} =$

$$= \int \frac{d \sin x}{\sin^6 x} - \int \frac{d \sin x}{\sin^4 x} = -\frac{1}{5 \sin^5 x} + \frac{1}{3 \sin^3 x} + C.$$

87. VIII. **Второй частный случай.** Если въ $\int \sin^m x \cos^n x dx$ *показатели* **разныхъ знаковъ** *и отрицательный превышаетъ положительный, а разность ихъ есть число* **четное**, то выгодно принять $tg\, x$ *или* $cotg\, x$ *за новую перемѣнную.*

Прим. 1. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^9 x} = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \frac{1}{\cos^4 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x d \operatorname{tg} x =$

$$= \int \operatorname{tg}^3 x (\operatorname{tg}^2 x + 1)^2 d \operatorname{tg} x = \int (\operatorname{tg}^7 x + 2 \operatorname{tg}^5 x + \operatorname{tg}^3 x) d \operatorname{tg} x =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^8 x}{8} + \frac{\operatorname{tg}^6 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C.$$

Прим. 2. $\int \frac{\cos^4 x dx}{\sin^8 x} = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} \frac{1}{\sin^2 x} \frac{dx}{\sin^2 x} =$

$$= -\int \operatorname{cotg}^4 x \operatorname{cosec}^2 x d \operatorname{cotg} x = -\int \operatorname{cotg}^4 x (\operatorname{cotg}^2 x + 1) d \operatorname{cotg} x =$$

$$= -\int (\operatorname{cotg}^6 x + \operatorname{cotg}^4 x) d \operatorname{cotg} x = -\frac{\operatorname{cotg}^7 x}{7} - \frac{\operatorname{cotg}^5 x}{5} + C.$$

Прим. 3. $\int \frac{dx}{\cos^8 x} = \int \frac{1}{\cos^6 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^6 x d \operatorname{tg} x = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1)^3 d \operatorname{tg} x =$

$$= \int (\operatorname{tg}^6 x + 3 \operatorname{tg}^4 x + 3 \operatorname{tg}^2 x + 1) d \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \frac{3 \operatorname{tg}^5 x}{5} + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C.$$

88. IX. **Третій частный случай:** для $\int \sin^m x dx$ и $\int \cos^m x dx$, при m — **цѣломъ и положительномъ**, легко вывести *общую формулу.* Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$I_m = \int \sin^m x dx = \int \sin^{m-1} x \sin x dx = -\int \sin^{m-1} x d \cos x =$$

$$= \underbrace{-\sin^{m-1} x \cos x}_{A} + (m - 1) \int \cos x . \sin^{m-2} x \cos x dx =$$

$$= A + (m-1)\int \sin^{m-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= A + (m-1)\int \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) dx =$$

$$= A + (m-1)\int \sin^{m-2} x dx - (m-1)\int \sin^m x dx =$$

$$= A + (m-1) \dot{I}_{m-2} - (m-1) \dot{I}_m;$$

отсюда $$m \dot{I}_m = A + (m-1) \dot{I}_{m-2}$$

и, слѣд., $$\dot{I}_m = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m} \dot{I}_{m-2};$$

пользуясь этой формулой, придемъ, наконецъ, либо къ $\dot{I}_1$, т.-е. къ $\int \sin x dx$, который равенъ $-\cos x + C$, либо къ $\dot{I}_0$, т.-е. къ $\int dx$, который равенъ $x + C$.

Подобнымъ же образомъ поступаемъ и съ $\int \cos^m x dx$.

Прим. 1. $\dot{I}_6 = \int \sin^6 x dx = \int \sin^5 x \sin x dx = -\int \sin^5 x d \cos x =$

$$= \underbrace{-\sin^5 x \cos x}_{A} + 5\int \cos x . \sin^4 x \cos x dx = A + 5\int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) dx =$$

$$= A + 5\int \sin^4 x dx - 5\int \sin^6 x dx = A + 5\dot{I}_4 - 5\dot{I}_6;$$

отсюда $6\dot{I}_6 = -\sin^5 x \cos x + 5\dot{I}_4$ и, слѣд., $\dot{I}_6 = -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} + \frac{5}{6} \dot{I}_4$,

а значитъ, $\dot{I}_4 = -\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4} \dot{I}_2$ и $\dot{I}_2 = -\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2} \dot{I}_0$,

такъ что $\dot{I}_6 = -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} - \frac{5 \sin^3 x \cos x}{24} - \frac{5 \sin x \cos x}{16} + \frac{5x}{8} + C.$

Прим. 2. $J_7 = \int \cos^7 x dx = \int \cos^6 x . d \sin x = \underbrace{\sin x \cos^6 x}_{A} +$

$$+ 6\int \sin^2 x \cos^5 x dx = A + 6\int (1 - \cos^2 x) \cos^5 x dx = A + 6J_5 - 6J_7,$$

такъ что $7J_7 = \sin x \cos^6 x + 6J_5$ и $J_7 = \frac{\sin x \cos^6 x}{7} + \frac{6}{7} J_5$;

значитъ, $J_5 = \frac{\sin x \cos^4 x}{5} + \frac{4}{5} J_3$, $J_3 = \frac{\sin x \cos^2 x}{3} + \frac{2}{3} J_1$

и $$J_1 = \int \cos x dx = \sin x + C,$$

а, слѣд., $J_7 = \frac{\sin x \cos^6 x}{7} + \frac{6 \sin x \cos^4 x}{35} + \frac{8 \sin x \cos^2 x}{35} + \frac{16 \sin x}{35} + C'$.

89. X. **Четвертый частный случай.** *Если въ* $\int \sin^m x \cos^n x dx$ *показатели* m *и* n — **цѣлые четные** *и притомъ* **положительные**, то для отысканія интеграла выгодно *ввести* **двойную дугу**, на основаніи формулъ:

$$\sin u \cos u = \frac{\sin 2u}{2}, \quad \sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}, \quad \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}, \ldots (3)$$

при чемъ эту операцію, конечно, можно — если понадобится — повторять нѣсколько разъ.

Прим. 1. $$\int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

Прим. 2. $$\int \sin^6 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 - 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int dx - \frac{3}{8} \int \cos 2x dx + \frac{3}{8} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8} \int (1 - \sin^2 2x) d \sin 2x =$$

$$= \frac{5x}{16} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3 \sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

Прим. 3. $$\int \sin^4 x \cos^6 x dx = \int (\sin x \cos x)^4 \cos^2 x dx =$$

$$= \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^4 \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{32} \int \sin^4 2x (1 + \cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{32}\int \sin^4 2x\,dx + \frac{1}{32}\int \sin^4 2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{32}\int\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 dx + \frac{1}{64}\int \sin^4 2x\,d\sin 2x =$$

$$= \frac{1}{128}\int (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x)\,dx + \frac{\sin^5 2x}{320} = \frac{x}{128} - \frac{\sin 4x}{256} +$$

$$+ \frac{1}{128}\int \frac{1+\cos 8x}{2}\,dx + \frac{\sin^5 2x}{320} = \frac{3x}{256} - \frac{\sin 4x}{256} + \frac{\sin 8x}{2048} + \frac{\sin^5 2x}{320} + C.$$

90. XI. **Интегралъ** $\int \sin^m x \cos^n x dx$ *приводится къ интегралу дифференціальнаго бинома положеніемъ, напр.,* $\sin x = z$.

Дѣйствительно, тогда $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$

и $x = \operatorname{Arcsin} z$, откуда $dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$,

а, слѣд., $\int \sin^m x \cos^n x dx = \int z^m (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz.$

Здѣсь показатели «внѣ скобокъ», «внутри скобокъ» и «надъ скобками» равны соотвѣтственно m, 2 и $\frac{n-1}{2}$; поэтому, на основаніи № 62, заключаемъ, что интегралъ найдется въ конечномъ видѣ, когда:

либо 1) $\frac{n-1}{2}$ — цѣлое, т.-е. n — **цѣлое нечетное,**

либо 2) $\frac{m+1}{2}$ — цѣлое, т.-е. m — **цѣлое нечетное,**

либо 3) $\frac{m+1}{2} + \frac{n-1}{2}$ или $\frac{m+n}{2}$ — цѣлое, т.-е. $m + n$ — **цѣлое четное.**

(Очевидно, что случай, когда и m, и n — цѣлыя, входитъ въ одинъ изъ перечисленныхъ, какъ частный).

При m — цѣломъ нечетномъ надо положить $\cos x = z$; при n — цѣломъ нечетномъ надо положить $\sin x = z$; если же и m, и n — дробныя, а $m + n$ — цѣлое четное число, то воспользуемся любымъ изъ этихъ положеній.

Прим. 1. $\int \sin^3 x \cos^{\frac{4}{3}} x dx = \int \sin^2 x . \cos^{\frac{4}{3}} x \sin x dx =$

$$= -\int (1-\cos^2 x)\cos^{\frac{4}{3}} x d\cos x = -\int \cos^{\frac{4}{3}} x d\cos x + \int \cos^{\frac{10}{3}} x d\cos x =$$

$$= -\frac{3\cos^{\frac{7}{3}} x}{7} + \frac{3\cos^{\frac{13}{3}} x}{13} + C = -3\left(\frac{\cos^2 x}{7} - \frac{\cos^4 x}{13}\right)\sqrt[3]{\cos x} + C;$$

здѣсь мы неявно ввели новую перемѣнную $z = \cos x$.

Прим. 2. $$I = \int \frac{\sin^{\frac{1}{2}} x dx}{\cos^5 x}.$$

Полагая $\sin x = z,$

имѣемъ: $\cos x = (1-z^2)^{\frac{1}{2}},\ x = \operatorname{Arcsin} z,\ dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$

и, слѣд., $$I = \int \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{(1-z^2)^3} = \int z^{\frac{1}{2}} \frac{(1-z^2+z^2)dz}{(1-z^2)^3} = \int z^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z^2)^2} +$$

$$+ \int z^{\frac{3}{2}} \frac{z dz}{(1-z^2)^3} = \int \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{(1-z^2)^2} + \frac{1}{2}\int z^{\frac{3}{2}} d\frac{1}{2(1-z^2)^2} = \int \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{(1-z^2)^2} + \underbrace{\frac{z^{\frac{3}{2}}}{4(1-z^2)^2}}_{A} +$$

$$- \frac{3}{8}\int \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{(1-z^2)^2} = A + \frac{5}{8}\int z^{\frac{1}{2}} \frac{1-z^2+z^2}{(1-z^2)^2} dz = A + \frac{5}{8}\int z^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{1-z^2} +$$

$$+ \frac{5}{8}\int z^{\frac{3}{2}} \frac{z dz}{(1-z^2)^2} = A + \frac{5}{8}\int \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{1-z^2} + \frac{5}{16}\int z^{\frac{3}{2}} d\frac{1}{1-z^2} =$$

$$= A + \frac{5}{8}\int \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{1-z^2} + \underbrace{\frac{5z^{\frac{3}{2}}}{16(1-z^2)}}_{B} - \frac{15}{32}\int \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{1-z^2} = A + B - \frac{5}{32}\int \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{z^2-1};$$

полагая теперь еще $z^{\frac{1}{2}} = y,$ имѣемъ: $z = y^2,\ dz = 2y dy$

и $$\int \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{z^2-1} = 2\int \frac{y^2 dy}{y^4-1} = \int \frac{dy}{y^2+1} + \int \frac{dy}{y^2-1} = \operatorname{Arctg} y + \frac{1}{2} l \frac{y-1}{y+1} + C,$$

а $$I = \frac{\sqrt{\sin^3 x}}{4\cos^4 x} + \frac{5\sqrt{\sin^3 x}}{16\cos^2 x} - \frac{5}{32}\operatorname{Arctg}\sqrt{\sin x} + \frac{5}{64} l \frac{\sqrt{\sin x}+1}{\sqrt{\sin x}-1} + C.$$

Прим. 3. $$I = \int \sqrt[4]{\frac{\sin^3 x}{\cos^{11} x}}\, dx.$$

Здѣсь $m=\frac{3}{4}$, $n=-\frac{11}{4}$ и $m+n=-2$ — цѣлое четное;

положивъ $$\sin x=z,$$

имѣемъ: $$\cos x=(1-z^2)^{\frac{1}{2}},\ x=\operatorname{Arcsin} z,\ dx=\frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

а потому $$I=\int z^{\frac{3}{4}}(1-z^2)^{-\frac{15}{8}}dz=\int z^{-3}(z^{-2}-1)^{-\frac{15}{8}}dz;$$

теперь полагаемъ $$z^{-2}-1=y;$$

тогда $$z^{-2}=y+1,\ z=(y+1)^{-\frac{1}{2}},\ dz=-\frac{1}{2}(y+1)^{-\frac{3}{2}}dy$$

и, слѣд.,

$$I=-\frac{1}{2}\int(y+1)^{\frac{3}{2}}.y^{-\frac{15}{3}}.(y+1)^{-\frac{3}{2}}dy=-\frac{1}{2}\int y^{-\frac{15}{8}}dy=\frac{4}{7}y^{-\frac{7}{8}}+C=$$

$$=\frac{4}{7(z^{-2}-1)^{\frac{7}{8}}}+C=\frac{4z^{\frac{7}{4}}}{7(1-z^2)^{\frac{7}{8}}}+C=\frac{4}{7}\sqrt[8]{\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)^7}+C=\frac{4}{7}\sqrt[4]{\operatorname{tg}^7 x}+C.$$

91. XII. Если въ $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$ *показатели* m *и* n — *дробные и условіямъ интегрируемости не удовлетворяютъ*, такъ что интегралъ этотъ *въ конечномъ видѣ не выражается*, то для упрощенія его изученія выражаютъ его помощью другаго интеграла — того же вида, но съ показателями m и n, представляющими правильныя дроби. Этого достигаемъ, дѣйствуя такъ, какъ будто бы интегрированіе въ конечномъ видѣ было возможно.

Прим. 1. $$I=\int \sin^{-\frac{4}{3}}x\cos^{\frac{3}{2}}x\,dx.$$

Здѣсь надо *повысить* m *и понизить* n, для чего поступаемъ такъ:

$$I=\int\cos^{\frac{1}{2}}x\sin^{-\frac{4}{3}}x.\cos x\,dx=\int\cos^{\frac{1}{2}}x\sin^{-\frac{4}{3}}x\,d\sin x=$$

$$=\int\cos^{\frac{1}{2}}x\,d\left[-3\sin^{-\frac{1}{3}}x\right]=-3\sin^{-\frac{1}{3}}x\cos^{\frac{1}{2}}x-\frac{3}{2}\int\sin^{\frac{2}{3}}x\cos^{-\frac{1}{2}}x\,dx.$$

Прим. 2. $$I=\int\sin^{\frac{1}{2}}x\cos^{\frac{5}{3}}x\,dx.$$

Здѣсь надо *понизить* n, *не мѣняя* m; поэтому дѣйствуемъ такъ:

$$I=\int\cos^{\frac{2}{3}}x\sin^{\frac{1}{2}}x\,d\sin x=\int\cos^{\frac{2}{3}}x\,d\frac{2\sin^{\frac{3}{2}}x}{3}=\underbrace{\frac{2\sin^{\frac{3}{2}}x\cos^{\frac{2}{3}}x}{3}}_{A}+$$

$$+\frac{4}{9}\int \sin^{\frac{5}{2}} x \cos^{-\frac{1}{3}} x dx = A + \frac{4}{9}\int \sin^{\frac{1}{2}} x (1 - \cos^2 x) \cos^{-\frac{1}{3}} x dx =$$

$$= A + \frac{4}{9}\int \sin^{\frac{1}{2}} x \cos^{-\frac{1}{3}} x dx - \frac{4}{9} I,$$

откуда $$I = \frac{6 \sin^{\frac{3}{2}} x \cos^{\frac{2}{3}} x}{13} + \frac{4}{13}\int \sin^{\frac{1}{2}} x \cos^{-\frac{1}{3}} x dx.$$

Прим. 3. $$I = \int \sin^{-\frac{8}{5}} x \cos^{\frac{3}{4}} x dx.$$

Здѣсь нужно *повысить m, не мѣняя n;* для этого дѣлаемъ такъ:

$$I = \int \sin^{-\frac{8}{5}} x \cos^{\frac{3}{4}} x (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \underbrace{\int \sin^{\frac{2}{5}} x \cos^{\frac{3}{4}} x dx}_{J} +$$

$$+ \int \sin^{-\frac{8}{5}} x \cos^{\frac{11}{4}} x dx = J + \int \cos^{\frac{7}{4}} x \sin^{-\frac{8}{5}} x d \sin x =$$

$$= J + \int \cos^{\frac{7}{4}} x d\left[-\frac{5 \sin^{-\frac{3}{5}} x}{3}\right] = J - \frac{5 \sin^{-\frac{3}{5}} x \cos^{\frac{7}{4}} x}{3} +$$

$$- \frac{35}{12}\int \sin^{\frac{2}{5}} x \cos^{\frac{3}{4}} x dx = -\frac{5 \sin^{-\frac{3}{5}} x \cos^{\frac{7}{4}} x}{3} - \frac{23}{12}\int \sin^{\frac{2}{5}} x \cos^{\frac{3}{4}} x dx.$$

Прим. 4. $$I = \int \sin^{-\frac{12}{5}} x \cos^{-\frac{5}{3}} x dx.$$

Здѣсь надо *повысить и m, и n,* почему поступаемъ такъ:

$$I = \int \sin^{-\frac{1 \cdot 2}{5}} x \cos^{-\frac{5}{3}} x (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \int \sin^{-\frac{2}{5}} x \cos^{-\frac{5}{3}} x dx +$$

$$+ \int \sin^{-\frac{12}{5}} x \cos^{\frac{1}{3}} x dx = \int \sin^{-\frac{2}{5}} x \cos^{-\frac{5}{3}} x (\sin^2 x + \cos^2 x) dx +$$

$$+ \int \sin^{-\frac{12}{5}} x \cos^{\frac{1}{3}} x (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \int \sin^{\frac{8}{5}} x \cos^{-\frac{5}{3}} x dx +$$

$$+ 2\underbrace{\int \sin^{-\frac{2}{5}} x \cos^{\frac{1}{3}} x dx}_{J} + \int \sin^{-\frac{12}{5}} x \cos^{\frac{7}{3}} x dx = -\int \sin^{\frac{3}{5}} x \cos^{-\frac{5}{3}} x d \cos x +$$

$$+ 2J + \int \cos^{\frac{4}{3}} x \sin^{-\frac{12}{5}} x d \sin x = -\int \sin^{\frac{3}{5}} x d\left[-\frac{3 \cos^{-\frac{2}{3}} x}{2}\right] + 2J +$$

$$+ \int \cos^{\frac{4}{3}} x d\left[-\frac{5 \sin^{-\frac{7}{5}} x}{7}\right] = \frac{3 \sin^{\frac{3}{5}} x \cos^{-\frac{2}{3}} x}{2} - \frac{9}{10}\int \sin^{-\frac{2}{5}} x \cos^{\frac{1}{3}} x dx +$$

$$+2J-\frac{5\sin^{-\frac{7}{5}}x\cos^{\frac{4}{3}}x}{7}-\frac{20}{21}\int\sin^{-\frac{2}{5}}x\cos^{\frac{1}{3}}x\,dx=$$

$$=\frac{3\sin^{\frac{3}{5}}x\cos^{-\frac{2}{3}}x}{2}-\frac{5\sin^{-\frac{7}{5}}x\cos^{\frac{4}{3}}x}{7}+\frac{31}{210}\int\sin^{-\frac{2}{5}}x\cos^{\frac{1}{3}}x\,dx.$$

92. XIII. **Интегралъ произведенія синусовъ и косинусовъ различныхъ линейныхъ функцій** x'a, *т.-е.*

$$\int\sin(\alpha x+a)\cos(\beta x+b)\sin(\gamma x+c)\ldots.dx$$

найдемъ, превращая это произведеніе въ сумму синусовъ и косинусовъ нѣкоторыхъ новыхъ линейныхъ функцій x'a, для чего поступаемъ слѣдующимъ образомъ.

Извѣстно, что $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

отсюда, полагая $\frac{\alpha+\beta}{2}=u,\ \frac{\alpha-\beta}{2}=v$

и, слѣд., $\alpha=u+v,\ \beta=u-v,$

получаемъ:

$$\left.\begin{aligned}\sin u\cos v&=\frac{\sin(u+v)+\sin(u-v)}{2}\\ \cos u\cos v&=\frac{\cos(u+v)+\cos(u-v)}{2}\\ \sin u\sin v&=\frac{\cos(u-v)-\cos(u+v)}{2}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(4)$$

Послѣдовательное примѣненіе этихъ формулъ и даетъ возможность постепенно совершить требуемое преобразованіе *произведенія* синусовъ и косинусовъ въ *сумму*.

Прим. 1. $\int \sin(2x+3)\cos(x-2)\cos(3x+5)\,dx =$

$$= \int \frac{\sin(3x+1)+\sin(x+5)}{2}\cos(3x+5)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(3x+1)\cos(3x+5)\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \sin(x+5)\cos(3x+5)\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin(6x+6)+\sin(-4)}{2}\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{\sin(4x+10)+\sin(-2x)}{2}\,dx = \frac{1}{4}\int \sin(6x+6)\,dx - \frac{\sin 4}{4}\int dx +$$

$$+ \frac{1}{4}\int \sin(4x+10)\,dx - \frac{1}{4}\int \sin 2x\,dx = -\frac{\cos(6x+6)}{24} - \frac{\sin 4}{4}x +$$

$$- \frac{\cos(4x+10)}{16} + \frac{\cos 2x}{8} + C.$$

Прим. 2. $\int \sin(x+1)\sin 3x\cos(2x+1)\cos(2x-3)\,dx =$

$$= \int \frac{\cos(-2x+1)-\cos(4x+1)}{2}\,\frac{\cos(4x-2)+\cos 4}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos(2x-1)\cos(4x-2)\,dx - \frac{1}{4}\int \cos(4x+1)\cos(4x-2)\,dx +$$

$$+ \frac{\cos 4}{4}\left[\int \cos(2x-1)\,dx - \int \cos(4x+1)\,dx\right] = \frac{1}{4}\int \frac{\cos(6x-3)+\cos(2x-1)}{2}\,dx +$$

$$- \frac{1}{4}\int \frac{\cos(8x-1)+\cos 3}{2}\,ax + \frac{\cos 4}{4}\left\{\frac{\sin(2x-1)}{2} - \frac{\sin(4x+1)}{4}\right\} = \frac{\sin(6x-3)}{48} +$$

$$+ \frac{\sin(2x-1)}{16} - \frac{\sin(8x-1)}{64} - \frac{\cos 3}{8}x + \frac{\cos 4}{8}\left[\sin(2x-1) - \frac{\sin(4x+1)}{2}\right] + C.$$

Прим. 3. $\int \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{4} + C =$

$$= -\frac{1-2\sin^2 x}{4} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C'.$$

93. XIV. **Интегралъ отъ произведенія цѣлыхъ положительныхъ степеней синусовъ и косинусовъ различныхъ линейныхъ функцій x'а, т.-е.**

$$\int \sin^k(\alpha x+a)\cos^m(\beta x+b)\sin^n(\gamma x+c)\ldots\,dx$$

приводится къ предъидущему, помощью выраженія этихъ степеней *въ синусахъ и косинусахъ* кратныхъ дугъ. При этомъ, если показатель степени высокъ, то придется примѣнить формулы, выводимыя для такого выраженія въ Высшей Алгебрѣ, на основаніи «*формулы Моавра*»; если же, какъ это чаще всего бываетъ, показатель степени не превышаетъ 2 или 3, то пользуемся просто формулами (3) и (4).

Прим. $\int \sin^2(x-3)\cos^3(2x+1)\,dx =$

$$= \int \frac{1-\cos 2(x-3)}{2}\,\frac{1+\cos 2(2x+1)}{2}\cos(2x+1)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\int \cos(2x+1)\,dx - \int \cos(2x-6)\cos(2x+1)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int \cos(4x+2)\cos(2x+1)\,dx - \int \cos(2x-6)\cos(4x+2)\cos(2x+1)\,dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{\sin(2x+1)}{2} - \int \frac{\cos(4x-5)+\cos 7}{2}\,dx + \int \frac{\cos(6x+3)+\cos(2x+1)}{2}\,dx + \right.$$

$$\left. - \int \frac{\cos(6x-4)+\cos(2x+8)}{2}\cos(2x+1)\,dx\right\} =$$

$$= \underbrace{\frac{\sin(2x+1)}{8} - \frac{\sin(4x-5)}{32} - \frac{\cos 7}{8}x + \frac{\sin(6x+3)}{48} + \frac{\sin(2x+1)}{16}}_{A} +$$

$$- \frac{1}{8}\int \cos(6x-4)\cos(2x+1)\,dx - \frac{1}{8}\int \cos(2x+8)\cos(2x+1)\,dx =$$

$$= A - \frac{1}{8}\int \frac{\cos(8x-3)+\cos(4x-5)}{2}\,dx - \frac{1}{8}\int \frac{\cos(4x+9)+\cos 7}{2}\,dx =$$

$$= A - \frac{\sin(8x-3)}{128} - \frac{\sin(4x-5)}{64} - \frac{\sin(4x+9)}{64} - \frac{\cos 7}{16}x + C = \frac{3\sin(2x+1)}{16} +$$

$$- \frac{3\sin(4x-5)}{64} - \frac{3\cos 7}{16}x + \frac{\sin(6x+3)}{48} - \frac{\sin(8x-3)}{128} - \frac{\sin(4x+9)}{64} + C.$$

94. XV. **Интегралъ** $\int [f_n(x)\cos\alpha x + \varphi_n(x)\sin\alpha x]\,dx$, **въ которомъ** $f_n(x)$ **и** $\varphi_n(x)$ **— цѣлые многочлены** n**'ой степени**, найдемъ, разбивъ его на сумму двухъ интеграловъ $\int f_n(x)\cos\alpha x dx$ и $\int \varphi_n(x)\sin\alpha x dx$ и понижая затѣмъ въ каждомъ изъ нихъ степень

многочлена помощью интегрированія по частямъ, при чемъ, конечно, *подъ знакъ дифференціала подводимъ все время* $\sin \alpha x$ и $\cos \alpha x$.

Поступая такъ, получаемъ:

$$\int [f_n(x) \cos \alpha x + \varphi_n(x) \sin \alpha x] = \int f_n(x) \cos \alpha x dx +$$

$$+ \int \varphi_n(x) \sin \alpha x dx = \int f_n(x)\, d \frac{\sin \alpha x}{\alpha} + \int \varphi_n(x)\, d\left(-\frac{\cos \alpha x}{\alpha}\right) =$$

$$= \frac{f_n(x)}{\alpha} \sin \alpha x - \int \frac{\sin \alpha x}{\alpha} f'_n(x)\, dx - \frac{\varphi_n(x)}{\alpha} \cos \alpha x +$$

$$+ \int \frac{\cos \alpha x}{\alpha} \varphi'_n(x)\, dx = -\frac{\varphi_n(x)}{\alpha} \cos \alpha x + \frac{f_n(x)}{\alpha} \sin \alpha x +$$

$$+ \int [f_{n-1}(x) \cos \alpha x + \varphi_{n-1}(x) \sin \alpha x]\, dx,$$

гдѣ $$f_{n-1}(x) \equiv \frac{\varphi'_n(x)}{\alpha}, \quad \varphi_{n-1}(x) = -\frac{f'_n(x)}{\alpha};$$

точно такъ же

$$\int [f_{n-1}(x) \cos \alpha x + \varphi_{n-1}(x) \sin \alpha x]\, dx = -\frac{\varphi_{n-1}(x)}{\alpha} \cos \alpha x +$$

$$+ \frac{f_{n-1}(x)}{\alpha} \sin \alpha x + \int [f_{n-2}(x) \cos \alpha x + \varphi_{n-2}(x) \sin \alpha x]\, dx,$$

и т. д.;

наконецъ, $$\int [f_0(x) \cos \alpha x + \varphi_0(x) \sin \alpha x]\, dx =$$

$$= -\frac{\varphi_0(x)}{\alpha} \cos \alpha x + \frac{f_0(x)}{\alpha} \sin \alpha x + C,$$

ибо $f_0(x)$ и $\varphi_0(x)$ — числа постоянныя; подставляя всѣ эти выраженія одно въ другое, получаемъ:

$$\int [f_n(x) \cos \alpha x + \varphi_n(x) \sin \alpha x]\, dx = -\frac{\varphi_n(x) + \varphi_{n-1}(x) + \ldots + \varphi_0(x)}{\alpha} \cos \alpha x +$$

$$+ \frac{f_n(x) + f_{n-1}(x) + \ldots + f_0(x)}{\alpha} \sin \alpha x + C$$

или $\int [f_n(x)\cos\alpha x + \varphi_n(x)\sin\alpha x]\,dx =$

$$= F_n(x)\cos\alpha x + \Phi_n(x)\sin\alpha x + C \ldots\ldots\ldots (5),$$

т.-е. *интегралъ имѣетъ тотъ же видъ, какъ и его подъинтегральная функція.*

Зная видъ интеграла, *можемъ его искать* «по способу неопредѣленныхъ коэфиціентовъ», для чего пишемъ его выраженіе съ буквенными коэфиціентами, затѣмъ дифференцируемъ полученное равенство (5) и, наконецъ, приравниваемъ другъ другу подобные члены правой и лѣвой части — это и дастъ намъ ур-нія для опредѣленія искомыхъ коэфиціентовъ. Для увѣренности въ законности этого метода надо еще показать, что если имѣемъ

$$f_n(x)\cos\alpha x + \varphi_n(x)\sin\alpha x \equiv \omega_n(x)\cos\alpha x + \theta_n(x)\sin\alpha x,$$

то непремѣнно $f_n(x) \equiv \omega_n(x)$ и $\varphi_n(x) \equiv \theta_n(x)$;

въ этомъ убѣждаемся слѣдующимъ образомъ: полагая $\alpha x = 2k\pi$, гдѣ k — любое цѣлое число, имѣемъ

$$f_n\left(\frac{2k\pi}{\alpha}\right) = \omega_n\left(\frac{2k\pi}{\alpha}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

а полагая $\alpha x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$,

получаемъ $$\varphi_n\left(\frac{2k\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{2\alpha}\right) = \theta_n\left(\frac{2k\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{2\alpha}\right) \ldots\ldots\ldots (7),$$

ибо

$\cos 2k\pi = 1$, $\sin 2k\pi = 0$, а $\cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$;

и такъ какъ равенства (6) и (7) существуютъ при безчисленномъ множествѣ значеній цѣлаго числа k, то заключаемъ, что они вѣрны *тожественно.*

Замѣчаніе. Если многочлены $f_n(x)$ и $\varphi_n(x)$ фактически будутъ разныхъ степеней, то при примѣненіи «способа неопредѣленныхъ коэффиціентовъ» должно степень **обоихъ** многочленовъ $F_n(x)$ и $\Phi_n(x)$ считать равною **высшей** изъ степеней многочленовъ $f_n(x)$ и $\varphi_n(x)$.

Прим. 1. $$I = \int (3x^2 - 5x - 11)\cos 2x\,dx.$$

Первый пріемъ — *непосредственно*:

$$I = \int (3x^2 - 5x - 11)\,d\frac{\sin 2x}{2} = \underbrace{\frac{3x^2 - 5x - 11}{2}\sin 2x}_{A} - \frac{1}{2}\int \sin 2x.(6x - 5)\,dx =$$

$$= A - \frac{1}{2}\int (6x - 5)\,d\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) = A + \frac{6x - 5}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\int \cos 2x.6dx =$$

$$= \frac{6x^2 - 10x - 25}{4}\sin 2x + \frac{6x - 5}{4}\cos 2x + C.$$

Второй пріемъ — *по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ:*

$$I = (Ax^2 + Bx + D)\cos 2x + (Ex^2 + Fx + G)\sin 2x + C;$$

дифференцированіе даетъ:

$$(3x^2 - 5x - 11)\cos 2x = 2Ax + B + 2(Ex^2 + Fx + G) \;\Big|\; \cos 2x - 2(Ax^2 + Bx + D) + 2Ex + F \;\Big|\; \sin 2x,$$

откуда

$$\begin{array}{rrr|l} 2E = & 3; & -2A = 0 & A = 0, \quad E = \frac{3}{2} \\ 2A + 2F = & -5; & -2B + 2E = 0 & B = \frac{3}{2}, \quad F = -\frac{5}{2} \\ B + 2G = & -11; & -2D + F = 0 & D = -\frac{5}{4}, \; G = -\frac{25}{4} \end{array}$$

и, слѣд.,
$$I = \frac{6x - 5}{4}\cos 2x + \frac{6x^2 - 10x - 25}{4}\sin 2x + C.$$

Прим. 2. $$I = \int [(x^3 + 2x^2 - 3x + 1)\cos x + (x^2 - 3x + 2)\sin x]\,dx.$$

Первый пріемъ — *непосредственно:*

$$I = \int (x^3 + 2x^2 - 3x + 1)\,d\sin x - \int (x^2 - 3x + 2)\,d\cos x =$$

$$= \underbrace{(x^3 + 2x^2 - 3x + 1)\sin x}_{A} - \int (3x^2 + 4x - 3)\sin x dx - \underbrace{(x^2 - 3x + 2)\cos x}_{B} +$$

$$- \int (2x - 3)\cos x dx = A + B + \int (3x^2 + 4x - 3)\, d\cos x + \int (2x - 3)\, d\sin x =$$

$$= A + B + \underbrace{(3x^2 + 4x - 3)\cos x}_{D} - \int (6x + 4)\cos x dx + \underbrace{(2x - 3)\sin x}_{E} +$$

$$- \int 2\sin x dx = A + B + D + E - \int (6x + 4)\, d\sin x + \underbrace{2\cos x}_{F} =$$

$$= A + B + D + E + F - (6x + 4)\sin x + \int 6\sin x dx =$$

$$= (2x^2 + 7x - 9)\cos x + (x^3 + 2x^2 - 7x - 6)\sin x + C.$$

Второй пріемъ — *по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.*

Полагая $\int [(x^3 + 2x^2 - 3x + 1)\cos x + (x^2 - 3x + 2)\sin x]\, dx =$

$$= (Ax^3 + Bx^2 + Dx + E)\cos x + (Fx^3 + Gx^2 + Hx + K)\sin x + C$$

и дифференцируя это равенство, получаемъ:

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 1)\cos x + (x^2 - 3x + 2)\sin x =$$

$$\left.\begin{array}{r} = 3Ax^2 + 2Bx + D \\ + Fx^3 + Gx^2 + Hx + K \end{array}\right| \cos x - \left.\begin{array}{r} (Ax^3 + Bx^2 + Dx + E) \\ + 3Fx^2 + 2Gx + H \end{array}\right| \sin x,$$

откуда

$$\begin{array}{rr|ll} F = 1; & -A = 0 & A = 0, & F = 1 \\ 3A + G = 2; & -B + 3F = 1 & B = 2, & G = 2 \\ 2B + H = -3; & -D + 2G = -3 & D = 7, & H = -7 \\ D + K = 1; & -E + H = 2 & E = -9, & K = -6 \end{array}$$

и, слѣд., $\dot{I} = (2x^2 + 7x - 9)\cos x + (x^3 + 2x^2 - 7x - 6)\sin x + C.$

95. XVI. **Интегралъ произведенія цѣлаго многочлена $f_n(x)$ и цѣлыхъ положительныхъ степеней синусовъ и косинусовъ линейныхъ функцій x'а, т.-е.**

$$\underline{\int f_n(x)\sin^k(\alpha x + a)\cos^m(\beta x + b)\ldots dx}$$

найдемъ, *преобразовывая* сначала, какъ въ № 93-мъ, *произведеніе этихъ степеней въ сумму синусовъ и косинусовъ другихъ линейныхъ функціи x'а, раскрывая затѣмъ скобки и поступая*, наконецъ, *какъ въ предыдущемъ №-ѣ.*

Прим. $I=\int(3x^3-4x^2+2x-1)\sin^2(x+2)\cos(2x-1)\,dx=$

$=\int(3x^3-4x^2+2x-1)\frac{1-\cos(2x+4)}{2}\cos(2x-1)\,dx=$

$=\frac{1}{2}\int(3x^3-4x^2+2x-1)\cos(2x-1)\,dx+$

$-\frac{1}{2}\int(3x^3-4x^2+2x-1)\frac{\cos(4x+3)+\cos 5}{2}\,dx=$

$=\frac{1}{2}\int(3x^3-4x^2+2x-1)\,d\frac{\sin(2x-1)}{2}+$

$-\frac{1}{4}\int(3x^3-4x^2+2x-1)\,d\frac{\sin(4x+3)}{4}-\frac{\cos 5}{4}\int(3x^3-4x^2+2x-1)\,dx=$

$=\underbrace{\frac{3x^3-4x^2+2x-1}{4}\sin(2x-1)}_{A}-\frac{1}{4}\int(9x^2-8x+2)\sin(2x-1)\,dx+$

$-\underbrace{\frac{3x^3-4x^2+2x-1}{16}\sin(4x+3)}_{B}+\frac{1}{16}\int(9x^2-8x+2)\sin(4x+3)\,dx+$

$\underbrace{-\frac{\cos 5}{4}\left(\frac{3x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+x^2-x\right)}_{D}=A+B+D+$

$+\frac{1}{4}\int(9x^2-8x+2)\,d\frac{\cos(2x-1)}{2}-\frac{1}{16}\int(9x^2-8x+2)\,d\frac{\cos(4x+3)}{4}=$

$=\underbrace{A+B+D+\frac{9x^2-8x+2}{8}\cos(2x-1)}_{E}-\frac{1}{8}\int(18x-8)\cos(2x-1)\,dx+$

$\underbrace{-\frac{9x^2-8x+2}{64}\cos(4x+3)}_{F}+\frac{1}{64}\int(18x-8)\cos(4x+3)\,dx=$

$=E+F-\frac{1}{4}\int(9x-4)\,d\frac{\sin(2x-1)}{2}+\frac{1}{32}\int(9x-4)\,d\frac{\sin(4x+3)}{4}=$

$$= E + F - \frac{9x-4}{8}\sin(2x-1) + \frac{9}{8}\int \sin(2x-1)\,dx + \frac{9x-4}{128}\sin(4x+3) +$$

$$- \frac{9}{128}\int \sin(4x+3)\,dx = \frac{18x^2-16x-5}{16}\cos(2x-1) +$$

$$+ \frac{6x^3-8x^2-5x+2}{8}\sin(2x-1) + \frac{-72x^2+64x-7}{512}\cos(4x+3) +$$

$$+ \frac{-24x^3+32x^2-7x+4}{128}\sin(4x+3) - \frac{9x^4-16x^3+12x^2-12x}{48}\cos 5 + C.$$

96. XVII. **Интегралъ** $\dot{I} = \int (A\cos kx + B\sin kx)\,e^{mx}\,dx$, **гдѣ** A **и** B — **постоянныя числа,** *найдемъ двукратнымъ* **интегрированіемъ по частямъ:**

$$\dot{I} = \int (A\cos kx + B\sin kx)\,e^{mx}\,dx = \int (A\cos kx + B\sin kx)\,d\frac{e^{mx}}{m} =$$

$$= (A\cos kx + B\sin kx)\frac{e^{mx}}{m} - \frac{k}{m}\int e^{mx}(-A\sin kx + B\cos kx)\,dx =$$

$$= (A\cos kx + B\sin kx)\frac{e^{mx}}{m} - \frac{k}{m}\int (B\cos kx - A\sin kx)\,d\frac{e^{mx}}{m} =$$

$$= (A\cos kx + B\sin kx)\frac{e^{mx}}{m} - \frac{k}{m}(B\cos kx - A\sin kx)\frac{e^{mx}}{m} +$$

$$+ \frac{k^2}{m^2}\int e^{mx}(-B\sin kx - A\cos kx)\,dx =$$

$$= \left[\left(A - \frac{k}{m}B\right)\cos kx + \left(B + \frac{k}{m}A\right)\sin kx\right]\frac{e^{mx}}{m} - \frac{k^2}{m^2}\dot{I} + C,$$

откуда

$$\left(1 + \frac{k^2}{m^2}\right)\dot{I} = \left[\frac{mA-kB}{m^2}\cos kx + \frac{mB+kA}{m^2}\sin kx\right]e^{mx} + C$$

и, слѣд., $\dot{I} = \left[\frac{mA-kB}{m^2+k^2}\cos kx + \frac{mB+kA}{m^2+k^2}\sin kx\right]e^{mx} + C_1.$

Такимъ образомъ, **интегралъ имѣетъ тотъ же видъ, какъ и его подъинтегральная функція.**

Зная **видъ интеграла,** *можемъ его искать* «**по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ**».

Прим. $$I = \int (5\cos 3x - 3\sin 3x)\, e^{4x}\, dx.$$

Первый пріемъ — *непосредственно* (подводя, для разнообразія, $\sin 3x$ и $\cos 3x$ подъ знакъ дифференціала):

$$I = \int 5e^{4x}\, d\left(\frac{\sin 3x}{3}\right) + \int e^{4x}\, d\cos 3x = \frac{5}{3}\sin 3x\, e^{4x} - \frac{4}{3}\int 5e^{4x}\sin 3x\, dx +$$

$$+ \cos 3x\, e^{4x} - 4\int e^{4x}\cos 3x dx = \left(\frac{5}{3}\sin 3x + \cos 3x\right)e^{4x} +$$

$$+ \frac{4}{9}\int 5e^{4x}\, d\cos 3x - \frac{4}{3}\int e^{4x}\, d\sin 3x = \int\left(\frac{5}{3}\sin 3x + \cos 3x\right)e^{4x} +$$

$$+ \frac{20}{9}\cos 3x\, e^{4x} - \frac{16}{9}\int 5e^{4x}\cos 3x dx - \frac{4}{3}\sin 3x\, e^{4x} + \frac{16}{3}\int e^{4x}\sin 3x dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{29}{9}\cos 3x\right)e^{4x} - \frac{16}{9}\int (5\cos 3x - 3\sin 3x)\, e^{4x}\, dx =$$

$$= \frac{29\cos 3x + 3\sin 3x}{9}\, e^{4x} - \frac{16}{9} I + C,$$

откуда $$I = \frac{29\cos 3x + 3\sin 3x}{25}\, e^{4x} + C'.$$

Второй пріемъ — *по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ:*

$$\int (5\cos 3x - 3\sin 3x)\, e^{4x}\, dx = (A\cos 3x + B\sin 3x)\, e^{4x} + C;$$

дифференцируя, получаемъ:

$$(5\cos 3x - 3\sin 3x)\, e^{4x} = [(4A + 3B)\cos 3x + (4B - 3A)\sin 3x]\, e^{4x},$$

откуда $$4A + 3B = 5, \quad 4B - 3A = -3$$

и, слѣд., $$B = \frac{3}{25}, \quad A = \frac{29}{25},$$

такъ что $$I = \frac{29\cos 3x + 3\sin 3x}{25}\, e^{4x} + C.$$

97. XVIII. **Интегралъ** $\int \{f_n(x)\cos kx + \varphi_n(x)\sin kx\}\, e^{mx}\, dx$ можемъ найти интегрированіемъ по частямъ, подводя e^{mx} подъ знакъ дифференціала; при этомъ убѣдимся, что **интегралъ имѣетъ**

тотъ же видъ, какъ и его подъинтегральная функція, т.-е. что

$$\int \{f_n(x)\cos kx + \varphi_n(x)\sin kx\}\, e^{mx}\, dx =$$

$$= \{F_n(x)\cos kx + \Phi_n(x)\sin kx\}\, e^{mx} + C. \ldots (8).$$

Послѣднее обстоятельство проще подтвердить, разбивая интегралъ на два и подводя $\cos kx\, e^{mx}$ и $\sin kx\, e^{mx}$ подъ знакъ дифференціала. Дѣйствительно, какъ видѣли въ предъидущемъ №, имѣемъ:

$$\int \cos kx e^{mx}\, dx = (A\cos kx + B\sin kx)\, e^{mx} + C_1$$

и

$$\int \sin kx e^{mx}\, dx = (D\cos kx + E\sin kx)\, e^{mx} + C_2,$$

гдѣ A, B, D, E — постоянныя числа; отсюда выводимъ, что

$$\cos kx\, e^{mx}\, dx = d\{(A\cos kx + B\sin kx)\, e^{mx}\}$$

и

$$\sin kx\, e^{mx}\, dx = d\{(D\cos kx + E\sin kx)\, e^{mx}\}$$

а потому

$$\int \{f_n(x)\cos kx + \varphi_n(x)\sin kx\}\, e^{mx}\, dx = \int f_n(x)\cos kx e^{mx}\, dx +$$

$$+ \int \varphi_n(x)\sin kx e^{mx}\, dx = \int f_n(x)\, d[(A\cos kx + B\sin kx)\, e^{mx}] +$$

$$+ \int \varphi_n(x)\, d[(D\cos kx + E\sin kx)\, e^{mx}] =$$

$$= f_n(x)[A\cos kx + B\sin kx]\, e^{mx} +$$

$$- \int (A\cos kx + B\sin kx)\, e^{mx} f'_n(x)\, dx +$$

$$+ \varphi_n(x)[D\cos kx + E\sin kx]\, e^{mx} +$$

$$- \int (D\cos kx + E\sin kx)\, e^{mx} \varphi'_n(x)\, dx =$$

$$= \{[Af_n(x) + D\varphi_n(x)] \cos kx + [Bf_n(x) + E\varphi_n(x)] \sin kx\} e^{mx} +$$

$$- \int \{[Af'_n(x) + D\varphi'_n(x)] \cos kx + [Bf'_n(x) + E\varphi'_n(x)] \sin kx\} e^{mx} dx =$$

$$= [\theta_n(x) \cos kx + \omega_n(x) \sin kx] e^{mx} +$$

$$+ \int [f_{n-1}(x) \cos kx + \varphi_{n-1}(x) \sin kx] e^{mx} dx;$$

такимъ образомъ пришли къ интегралу того же вида, какъ и заданный, но только болѣе простому, такъ какъ въ немъ степень цѣлыхъ многочленовъ, на которые множатся $\cos kx$ и $\sin kx$, на единицу ниже, чѣмъ въ искомомъ. Примѣняя этотъ способъ и дальше, и получимъ въ концѣ концовъ равенство (8).

Зная **видъ интеграла**, *можемъ его искать* «**по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ**»; послѣдній въ разсматриваемомъ случаѣ оказывается проще всѣхъ другихъ.

Прим. $$I = \int [(x^3 + 2x^2 - 3x + 1) \cos 2x + (x^2 - 5x + 2) \sin 2x] e^x dx =$$

$$= [(Ax^3 + Bx^2 + Dx + E) \cos 2x + (Fx^3 + Hx^2 + Kx + L) \sin 2x] e^x + C.$$

Дифференцируя, получаемъ:

$$[(x^3 + 2x^2 - 3x + 1) \cos 2x + (x^2 - 5x + 2) \sin 2x] e^x =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} Ax^3 + Bx^2 + Dx + E \\ + 3Ax^2 + 2Bx + D \\ + 2Fx^3 + 2Hx^2 + 2Kx + 2L \end{bmatrix} \cos 2x + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} Fx^3 + Hx^2 + Kx + L \\ - 2Ax^3 - 2Bx^2 - 2Dx - 2E \\ + 3Fx^2 + 2Hx + K \end{bmatrix} \sin 2x \right\} e^x;$$

отсюда

$$A + 2F = 1,\ B + 3A + 2H = 2,\ D + 2B + 2K = -3,\ E + D + 2L = 1,$$

$$F - 2A = 0,\ H - 2B + 3F = 1,\ K - 2D + 2H = -5,\ L - 2E + K = 2$$

и, слѣд., $A = \frac{1}{5}$, $F = \frac{2}{5}$; $B = \frac{9}{25}$, $H = \frac{13}{25}$; $D = \frac{209}{125}$, $K = -\frac{337}{125}$;

$$E = -\frac{1258}{625},\ L = \frac{419}{625},$$

а, значитъ, $I = \{(125x^3 + 225x^2 + 1045x - 1258)\cos 2x +$

$$+ (250x^3 + 325x^2 - 1685x + 419)\sin 2x\}\frac{e^x}{625} + C.$$

98. XIX. **Интегралъ произведенія цѣлаго многочлена $f_n(x)$, показательной функціи e^{mx} и цѣлыхъ положительныхъ степеней синусовъ и косинусовъ линейныхъ функцій x'а, т.-е.**

$$\int f_n(x)\, e^{mx} \sin^p(\alpha x + a)\cos^q(\beta x + b)\ldots . dx$$

найдемъ, *преобразовывая*, какъ въ № 93-мъ, **произведеніе** *этихъ степеней въ* **сумму** *синусовъ и косинусовъ нѣкоторыхъ другихъ линейныхъ же функцій x'а, раскрывая затѣмъ подъ интеграломъ скобки и примѣняя къ каждому члену способъ, изложенный въ предыдущемъ №.*

Прим. $\int (x+2)\, e^x \sin^2 x \cos x dx = \int (x+2)\, e^x \frac{1-\cos 2x}{2}\cos x dx =$

$$= \int \frac{x+2}{2} e^x \cos x dx - \int \frac{x+2}{2} e^x \cos 2x \cos x dx = \int \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\cos x e^x\, dx +$$

$$- \int \left(\frac{1}{2}x + 1\right) e^x \frac{\cos 3x + \cos x}{2} dx = \int \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)\cos x e^x\, dx +$$

$$- \int \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)\cos 3x e^x\, dx = [(Ax + B)\cos x + (Dx + E)\sin x]\, e^x +$$

$$+ [(Fx + H)\cos 3x + (Kx + L)\sin 3x]\, e^x + C;$$

дифференцируя, получаемъ:

$$\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)\cos x e^x - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)\cos 3x e^x =$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} Ax + B \\ + A \\ + Dx + E \end{bmatrix}\cos x + \begin{bmatrix} Dx + E \\ - Ax - B \\ + D \end{bmatrix}\sin x\right\} e^x +$$

$$+ \left\{\begin{bmatrix} Fx + H \\ + F \\ 3Kx + 3L \end{bmatrix}\cos 3x + \begin{bmatrix} Kx + L \\ - 3Fx - 3H \\ + K \end{bmatrix}\sin 3x\right\} e^x,$$

откуда

$$A+D=\frac{1}{4},\ B+A+E=\frac{1}{2},\ F+3K=-\frac{1}{4},\ H+F+3L=-\frac{1}{2},$$

$$D-A=0,\quad E-B+D=0,\quad K-3F=0,\qquad L-3H+K=0$$

и, слѣд.,

$$A=\frac{1}{8},\ D=\frac{1}{8};\ B=\frac{1}{4},\ E=\frac{1}{8};$$

$$F=-\frac{1}{40},\ K=-\frac{3}{40};\ H=-\frac{7}{100},\ L=-\frac{27}{200},$$

а, значитъ,

$$I=\frac{(25x+50)\cos x+(25x+25)\sin x-(5x+14)\cos 3x-(15x+27)\sin 3x}{200}e^x+C.$$

99. XX. **Интегралы** $\int\frac{\sin x dx}{x}$ *и* $\int\frac{\cos x dx}{x}$ *помощью извѣстныхъ намъ простѣйшихъ функцій въ конечномъ видѣ* **не выражаются**, *а представляютъ нѣкоторыя* **новыя** *функціи;* первую изъ нихъ наз. **интегральнымъ синусомъ**, а вторую — **интегральнымъ косинусомъ**, и тѣ ихъ значенія, которыя обращаются въ нуль при $x=0$, обозначаютъ соотвѣтственно черезъ $Si(x)$ и $Ci(x)$, такъ что

$$\int\frac{\sin x}{x}dx=Si(x)+C,\qquad \int\frac{\cos x}{x}dx=Ci(x)+C.$$

100. XXI. **Интегралы** $\int\frac{\sin x dx}{x^n}$ *и* $\frac{\cos x dx}{x^n}$ *при* n — **цѣломъ положительномъ** *приводятся къ интегральному синусу или косинусу помощью* **интегрированія по частямъ.** Дѣйствительно, имѣемъ:

$$\int\frac{\sin x dx}{x^n}=\int\sin x d\left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right]=-\frac{\sin x}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{\cos x dx}{x^{n-1}}$$

и т. д.

$$\text{и}\int\frac{\cos x dx}{x^n}=\int\cos x d\left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right]=-\frac{\cos x}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{\sin x dx}{x^{n-1}}$$

и т. д.

— пока не придемъ къ $\int\frac{\sin x dx}{x}$ либо къ $\int\frac{\cos x dx}{x}$.

Прим. 1. $\int \frac{\sin 2x dx}{x^4} = \int \sin 2x d\left[-\frac{1}{3x^3}\right] = \underbrace{-\frac{\sin 2x}{3x^3}}_{A} + \frac{2}{3}\int \frac{\cos 2x dx}{x^3} =$

$= A + \frac{2}{3}\int \cos 2x d\left[-\frac{1}{2x^2}\right] = \underbrace{A - \frac{\cos 2x}{3x^2}}_{B} - \frac{2}{3}\int \frac{\sin 2x dx}{x^2} =$

$= B + \frac{2}{3}\int \sin 2x d\left(\frac{1}{x}\right) = B + \frac{2\sin 2x}{3x} - \frac{4}{3}\int \frac{\cos 2x dx}{x} =$

$= -\frac{\sin 2x}{3x^3} - \frac{\cos 2x}{3x^2} + \frac{2\sin 2x}{3x} - \frac{4}{3} Ci(2x) + C.$

Прим. 2. $\int \frac{\cos 3x dx}{(x-1)^3} = \int \cos 3x d\left[-\frac{1}{2(x-1)^2}\right] = -\frac{\cos 3x}{2(x-1)^2} +$

$-\frac{3}{2}\int \frac{\sin 3x dx}{(x-1)^2} = A + \frac{3}{2}\int \sin 3x d\frac{1}{x-1} = \underbrace{A + \frac{3\sin 3x}{2(x-1)}}_{B} - \frac{9}{2}\int \frac{\cos 3x dx}{x-1} =$

$= B - \frac{9}{2}\int \frac{\cos(3x-3+3)}{x-1} dx = B - \frac{9}{2}\int \frac{\cos(3x-3).\cos 3 - \sin(3x-3).\sin 3}{x-1} dx =$

$= B - \frac{9\cos 3}{2}\int \frac{\cos(3x-3)}{x-1} dx + \frac{9\sin 3}{2}\int \frac{\sin(3x-3)}{x-1} dx =$

$= -\frac{\cos 3x}{2(x-1)^2} + \frac{3\sin 3x}{2(x-1)} - \frac{9\cos 3}{2} Ci(3x-3) + \frac{9\sin 3}{2} Si(3x-3) + C.$

101. XXII. **Интегралъ** $\int \frac{\sin^k x \cos^m x dx}{x^n}$ *при* k, m *и* n — **цѣлыхъ и положительныхъ** *тоже приводится къ интегральнымъ синусу и косинусу, для чего предварительно надо преобразовать числитель въ сумму синусовъ и косинусовъ кратныхъ дугъ.*

Прим. $\int \frac{\sin^2 x \cos x dx}{x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2\sin x \cos x)\sin x}{x^2} dx =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x \sin x}{x^2} dx = -\frac{1}{4}\int \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2} dx = -\frac{1}{4}\int \cos 3x d\left(-\frac{1}{x}\right) +$

$+ \frac{1}{4}\int \cos x d\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{\cos 3x}{4x} + \frac{3}{4}\int \frac{\sin 3x dx}{x} - \frac{\cos x}{4x} - \frac{1}{4}\int \frac{\sin x dx}{x} =$

$= \frac{\cos 3x - \cos x}{4x} + \frac{3}{4} Si(3x) - \frac{1}{4} Si(x) + C.$

102. XXIII. Интегралъ $I=\int\frac{a\cos x+b\sin x}{\alpha\cos x+\beta\sin x}dx$ можно найти, кромѣ общаго способа (т.-е. положенія $\operatorname{tg}x=z$), еще такъ. Полагая

$$\alpha=r\sin\varphi \text{ и } \beta=r\cos\varphi, \quad \text{откуда} \quad r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

получаемъ: $$I=\frac{1}{r}\int\frac{a\cos x+b\sin x}{\sin\varphi\cos x+\cos\varphi\sin x}dx=\frac{1}{r}\int\frac{a\cos x+b\sin x}{\sin(x+\varphi)}dx;$$

если же еще положимъ $$x+\varphi=z,$$

то получимъ: $$I=\frac{1}{r}\int\frac{a\cos(z-\varphi)+b\sin(z-\varphi)}{\sin z}dz=$$

$$=\frac{1}{r}\int\frac{a(\cos z\cos\varphi+\sin z\sin\varphi)+b(\sin z\cos\varphi-\cos z\sin\varphi)}{\sin z}dz=$$

$$=\frac{a\cos\varphi-b\sin\varphi}{r}\int\frac{\cos z dz}{\sin z}+\frac{a\sin\varphi+b\cos\varphi}{r}\int dz=$$

$$=\frac{a\cos\varphi-b\sin\varphi}{r}l\sin z+\frac{a\sin\varphi+b\cos\varphi}{r}z+C_1=$$

$$=\frac{a\beta-b\alpha}{\alpha^2+\beta^2}l[\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi]+\frac{a\alpha+b\beta}{\alpha^2+\beta^2}(x+\varphi)+C_1=$$

$$=\frac{a\beta-b\alpha}{\alpha^2+\beta^2}l\frac{\beta\sin x+\alpha\cos x}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+\frac{a\alpha+b\beta}{\alpha^2+\beta^2}(x+\varphi)+C_1,$$

т.-е. $$\underline{I=\frac{a\beta-b\alpha}{\alpha^2+\beta^2}l(\alpha\cos x+\beta\sin x)+\frac{a\alpha+b\beta}{\alpha^2+\beta^2}x+C.}$$

Можно и еще иначе найти этотъ интегралъ; именно, положимъ:

$$\int\frac{\cos x dx}{\alpha\cos x+\beta\sin x}=M \quad \text{и} \quad \int\frac{\sin x dx}{\alpha\cos x+\beta\sin x}=N;$$

тогда $$\alpha M+\beta N=\int\frac{\alpha\cos x+\beta\sin x}{\alpha\cos x+\beta\sin x}dx=\int dx=x+C_1$$

и

$$\beta M-\alpha N=\int\frac{\beta\cos x-\alpha\sin x}{\alpha\cos x+\beta\sin x}dx=\int\frac{d(\alpha\cos x+\beta\sin x)}{\alpha\cos x+\beta\sin x}=l(\alpha\cos x+\beta\sin x)+C_2,$$

откуда $$M=\frac{\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}l(\alpha\cos x+\beta\sin x)+\alpha C_1+\beta C_2$$

и $$N=\frac{\beta x}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}l(\alpha\cos x+\beta\sin x)+\beta C_1-\alpha C_2,$$

а слѣд., $$I=aM+bN=\frac{a\alpha+b\beta}{\alpha^2+\beta^2}x+\frac{a\beta-b\alpha}{\alpha^2+\beta^2}l(\alpha\cos x+\beta\sin x)+C.$$

§ 5. Функціи круговыхъ сложныхъ чиселъ.

103. I. Интегралы $\int f_n(x)\,\mathrm{Arcsin}\,x\,dx$ *и* $\int f_n(x)\,\mathrm{Arccos}\,x\,dx$ *найдемъ*, интегрируя по частямъ *съ подведеніемъ* $f_n(x)$ *подъ знакъ дифференціала.*

Дѣйствительно, такъ какъ $\int f_n(x)\,dx = f_{n+1}(x)$,

гдѣ $f_{n+1}(x)$ — цѣлый многочленъ $(n+1)$'ой степени, то

$$f_n(x)\,dx = df_{n+1}(x)$$

и, слѣд., напр., $\int f_n(x)\,\mathrm{Arcsin}\,x\,dx = \int \mathrm{Arcsin}\,x\,df_{n+1}(x) =$

$$= f_{n+1}(x)\,\mathrm{Arcsin}\,x - \int f_{n+1}(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

а послѣдній интегралъ найти умѣемъ.

Прим. $$I = \int (6x^2 - 5x + 1)\,\mathrm{Arccos}\,x\,dx = \int \mathrm{Arccos}\,x\;\; d\left(2x^3 - \frac{5x^2}{2} + x\right) =$$

$$= \frac{4x^3 - 5x^2 + 2x}{2}\,\mathrm{Arccos}\,x + \frac{1}{2}\int (4x^3 - 5x^2 + 2x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

но $$\int \frac{(4x^3 - 5x^2 + 2x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = (Ax^2 + Bx + D)\sqrt{1-x^2} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

откуда

$$\frac{4x^3 - 5x^2 + 2x}{\sqrt{1-x^2}} = (2Ax + B)\sqrt{1-x^2} - \frac{(Ax^2 + Bx + D)\,x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$$

и, слѣд., $4x^3 - 5x^2 + 2x = (2Ax + B)(1 - x^2) - (Ax^2 + Bx + D)\,x + \lambda =$

$$= \begin{array}{c|c|c|c} -2A & x^3 - B & x^2 + 2A & x + B; \\ -A & -B & -D & +\lambda \end{array}$$

поэтому $$-3A = 4,\ -2B = -5,\ 2A - D = 2,\ B + \lambda = 0,$$

т.-е. $$A = -\frac{4}{3},\ B = \frac{5}{2},\ D = -\frac{14}{3},\ \lambda = -\frac{5}{2},$$

и $I=\frac{4x^3-5x^2+2x}{2}\operatorname{Arccos}x-\frac{8x^2-15x+28}{12}\sqrt{1-x^2}-\frac{5}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$

$$=\frac{8x^3-10x^2+4x+5}{4}\operatorname{Arccos}x-\frac{8x^2-15x+28}{12}\sqrt{1-x^2}+C.$$

104. II. **Интегралы** $\int f_n(x)\operatorname{Arcsin}^m x\,dx$ *и* $\int f_n(x)\operatorname{Arccos}^m x\,dx$, *въ которыхъ* m — **цѣлое положительное число,** *тоже найдемъ послѣдовательнымъ* **интегрированіемъ по частямъ,** *оставляя всегда степень* $\operatorname{Arcsin}x$ *или* $\operatorname{Arccos}x$ *внѣ знака дифференціала.*

Дѣйствительно, имѣемъ, напр., что

$$I=\int f_n(x)\operatorname{Arcsin}^m x\,dx=\int\operatorname{Arcsin}^m x f_n(x)\,dx=\int\operatorname{Arcsin}^m x\,df_{n+1}(x)=$$

$$=\underbrace{f_{n+1}(x)\operatorname{Arcsin}^m x}_{A}-m\int f_{n+1}(x)\operatorname{Arcsin}^{m-1}x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=A-m\int\operatorname{Arcsin}^{m-1}(x)\frac{f_{n+1}(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

но мы знаемъ, что $\int\frac{f_{n+1}(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=F_n(x)\sqrt{1-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

и, слѣд., $\frac{f_{n+1}(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=d\left[F_n(x)\sqrt{1-x^2}\right]+\lambda\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

значитъ, $I=A-m\int\operatorname{Arcsin}^{m-1}x\left\{d\left[F_n(x)\sqrt{1-x^2}\right]+\right.$

$$\left.+\lambda\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right\}=A-\lambda m\int\operatorname{Arcsin}^{m-1}x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+$$

$$-m\int\operatorname{Arcsin}^{m-1}x\,d\left[F_n(x)\sqrt{1-x^2}\right]=A-\lambda\operatorname{Arcsin}^m x+$$

$$-mF_n(x)\sqrt{1-x^2}\operatorname{Arcsin}^{m-1}x+m(m-1)\int F_n(x)\operatorname{Arcsin}^{m-2}x\,dx.$$

Такимъ образомъ искомый интегралъ выразился помощью извѣстныхъ намъ функцій и интеграла того же вида, но болѣе простаго, такъ какъ въ немъ показатель степени у $\operatorname{Arcsin}x$ на 2 единицы меньше, чѣмъ въ искомомъ; значитъ, примѣняя

этотъ же методъ и дальше, придемъ, наконецъ, къ $\int \varphi_n(x)\,dx$, когда m — четное, и къ $\int \omega_n(x)\,\mathrm{Arcsin}\,x\,dx$, когда m — нечетное, а оба эти интеграла найти умѣемъ.

Прим. $I = \int (18x^2 - 4x + 3)\,\mathrm{Arcsin}^3\,x\,dx = \int \mathrm{Arcsin}^3\,x\,(18x^2 - 4x + 3)\,dx =$

$$= \int \mathrm{Arcsin}^3\,x\,d\,(6x^3 - 2x^2 + 3x) = \underbrace{(6x^3 - 2x^2 + 3x)\,\mathrm{Arcsin}^3\,x}_{A} +$$

$$- 3\int \mathrm{Arcsin}^2\,x\,(6x^3 - 2x^2 + 3x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

но $\int (6x^3 - 2x^2 + 3x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (ax^2 + bx + e)\sqrt{1-x^2} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

откуда $6x^3 - 2x^2 + 3x = (2ax + b)(1 - x^2) - (ax^2 + bx + e)\,x + \lambda =$

$$= -3ax^3 - 2bx^2 + (2a - e)\,x + b + \lambda$$

и, слѣд., $-3a = 6,\ -2b = -2,\ 2a - e = 3,\ b + \lambda = 0,$

т.-е. $a = -2,\ b = 1,\ e = -7,\ \lambda = -1;$

значитъ,

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\,[(-2x^2 + x - 7)\sqrt{1-x^2}] - \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

а потому

$$I = A + 3\int \mathrm{Arcsin}^2\,x\,d\,[(2x^2 - x + 7)\sqrt{1-x^2}] + 3\int \mathrm{Arcsin}^2\,x\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \underbrace{A + 3\,(2x^2 - x + 7)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Arcsin}^2\,x}_{B} +$$

$$- 6\int (2x^2 - x + 7)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Arcsin}\,x\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \mathrm{Arcsin}^3\,x =$$

$$= \underbrace{B + \mathrm{Arcsin}^3\,x}_{D} - 6\int \mathrm{Arcsin}\,x\,(2x^2 - x + 7)\,dx =$$

$$= D - \int \mathrm{Arcsin}\,x\,d\,(4x^3 - 3x^2 + 42x) = D - (4x^3 - 3x^2 + 42x)\,\mathrm{Arcsin}\,x +$$

$$+ \int (4x^3 - 3x^2 + 42x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (6x^3 - 2x^2 + 3x + 1)\,\mathrm{Arcsin}^3\,x +$$

$$+ 3(2x^2 - x + 7)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Arcsin}^2 x - \left(4x^3 - 3x^2 + 42x + \frac{3}{2}\right)\mathrm{Arcsin}\, x +$$

$$- \frac{8x^2 - 9x + 268}{6}\sqrt{1-x^2} + C.$$

105. III. **Слѣдствіе: Интегралы** $\int \mathrm{Arcsin}^m x\,dx$ *и* $\int \mathrm{Arccos}^m x\,dx$ *при* m **— цѣломъ и положительномъ** *найдутся тоже* **послѣдовательнымъ интегрированіемъ по частямъ.** Напр.,

$$\int \mathrm{Arcsin}^m x\,dx = \underbrace{x\,\mathrm{Arcsin}^m x}_{A} - m\int x\,\mathrm{Arcsin}^{m-1} x\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= A + m\int \mathrm{Arcsin}^{m-1} x\,\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = A + m\int \mathrm{Arcsin}^{m-1} x\,d\sqrt{1-x^2} =$$

$$= \underbrace{A + m\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Arcsin}^{m-1} x}_{B} +$$

$$- m(m-1)\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Arcsin}^{m-2} x\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= B - m(m-1)\int \mathrm{Arcsin}^{m-2} x\,dx;$$

такимъ образомъ показатель m пониженъ на 2 единицы.

Прим. 1. $$\int \mathrm{Arcsin}^4 x = \underbrace{x\,\mathrm{Arcsin}^4 x}_{A} - 4\int x\,\mathrm{Arcsin}^3 x\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= A + 4\int \mathrm{Arcsin}^3 x\,d\sqrt{1-x^2} = \underbrace{A + 4\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Arcsin}^3 x}_{B} +$$

$$- 12\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Arcsin}^2 x\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = B - 12\int \mathrm{Arcsin}^2 x\,dx = \underbrace{B - 12x\,\mathrm{Arcsin}^2 x}_{D} +$$

$$+ 24\int x\,\mathrm{Arcsin}\, x\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = D - 24\int \mathrm{Arcsin}\, x\,d\sqrt{1-x^2} =$$

$$= \underbrace{D - 24\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Arcsin}\, x}_{E} + 24\int \sqrt{1-x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = E + 24\int dx =$$

$$= x\,[\mathrm{Arcsin}^4 x - 12\,\mathrm{Arcsin}^2 x + 24] + 4\sqrt{1-x^2}\,[\mathrm{Arcsin}^3 x - 6\,\mathrm{Arcsin}\, x] + C.$$

Прим. 2. $\int \operatorname{Arccos}^3 x dx = \underbrace{x \operatorname{Arccos}^3 x}_{A} + 3\int x \operatorname{Arccos}^2 x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= A - 3\int \operatorname{Arccos}^2 x d\sqrt{1-x^2} = \underbrace{A - 3\sqrt{1-x^2}\operatorname{Arccos}^2 x}_{B} - 6\int \operatorname{Arccos} x dx =$

$= B - 6x \operatorname{Arccos} x - 6\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= x(\operatorname{Arccos}^3 x - 6 \operatorname{Arccos} x) - 3\sqrt{1-x^2}(\operatorname{Arccos}^2 x - 2) + C.$

106. IV. **Интегралы** $\int \frac{dx}{\operatorname{Arcsin}^m x}$ *и* $\int \frac{dx}{\operatorname{Arccos}^m x}$, *при* m — **цѣломъ положительномъ**, *приводятся къ интегральному синусу или инт. косинусу, для чего надо соотвѣтственно* $\operatorname{Arcsin} x$ *или* $\operatorname{Arccos} x$ *принять за новую перемѣнную.*

Дѣйствительно, полагая, напр., $\operatorname{Arcsin} x = y$,

имѣемъ: $x = \sin y$ и $dx = \cos y dy$,

а слѣд., $\int \frac{dx}{\operatorname{Arcsin}^m x} = \int \frac{\cos y dy}{y^m}$;

этотъ же интегралъ, какъ мы знаемъ, приводится къ $Si(y)$ либо $Ci(y)$ помощью интегрированія по частямъ.

Прим. 1. $I = \int \frac{dx}{\operatorname{Arcsin}^2 x}$.

Полагая $\operatorname{Arcsin} x = y$, имѣемъ $x = \sin y$, $dx = \cos y dy$

и, слѣд., $I = \int \frac{\cos y dy}{y^2} = \int \cos y d\left(-\frac{1}{y}\right) = -\frac{\cos y}{y} - \int \frac{\sin y dy}{y} =$

$= -\frac{\cos y}{y} - Si(y) + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\operatorname{Arcsin} x} - Si(\operatorname{Arcsin} x) + C.$

Прим. 2. $I = \int \frac{dx}{\operatorname{Arccos}^3 x}$.

Положеніе $\operatorname{Arccos} x = y$ даетъ: $x = \cos y$, $dx = -\sin y dy$

и, слѣд., $$I = -\int \frac{\sin y dy}{y^3} = \int \sin y d\frac{1}{2y^2} = \underbrace{\frac{\sin y}{2y^2}}_{A} - \frac{1}{2}\int \frac{\cos y dy}{y^2} =$$

$$= A + \frac{1}{2}\int \cos y d\frac{1}{y} = A + \frac{\cos y}{2y} + \frac{1}{2}\int \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\sin y}{2y^2} + \frac{\cos y}{2y} + \frac{1}{2} Si(y) + C =$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\operatorname{Arccos}^2 x} + \frac{x}{2\operatorname{Arccos} x} + \frac{1}{2} Si(\operatorname{Arccos} x) + C.$$

107. V. Если n — **цѣлое положительное** *число*, **большее единицы**, то **интегралы** $\int \frac{\operatorname{Arcsin} x dx}{x^n}$ и $\int \frac{\operatorname{Arccos} x dx}{x^n}$ выражаются въ конечномъ видѣ.

Дѣйствительно, напр., $$\int \frac{\operatorname{Arcsin} x dx}{x^n} = \int \operatorname{Arcsin} x d\left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right] =$$

$$= -\frac{\operatorname{Arcsin} x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{1-x^2}};$$

послѣдній же интегралъ найти умѣемъ.

Прим. 1. $$\int \frac{\operatorname{Arcsin} x dx}{x^3} = \int \operatorname{Arcsin} x d\left(-\frac{1}{2x^2}\right) = \underbrace{-\frac{\operatorname{Arcsin} x}{2x^2}}_{A} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = A - \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} = A - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1} + C =$$

$$= -\frac{\operatorname{Arcsin} x}{2x^2} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x} + C.$$

Прим. 2. $$\int \frac{\operatorname{Arccos} x dx}{x^2} = \int \operatorname{Arccos} x d\left(-\frac{1}{x}\right) = \underbrace{-\frac{\operatorname{Arccos} x}{x}}_{A} +$$

$$- \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = A + \int \frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} = A + l\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}\right) + C =$$

$$= -\frac{\operatorname{Arccos} x}{x} + l\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$$

Замѣчаніе. Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ можно выразить въ конечномъ видѣ и интегралы $\int \frac{\operatorname{Arcsin}^m x dx}{x^n}$ и $\int \frac{\operatorname{Arccos}^m x dx}{x^n}$, въ которыхъ числа

m и n — цѣлыя и положительныя, при чемъ $n > 1$; напр.,

$$\int \frac{\operatorname{Arcsin}^2 x\,dx}{x^3} = \int \operatorname{Arcsin}^2 x\,d\left[-\frac{1}{2x^2}\right] = \underbrace{-\frac{\operatorname{Arcsin}^2 x}{2x^2}}_{A} + \int \operatorname{Arcsin} x \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= A - \int \operatorname{Arcsin} x\,d\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = A - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\operatorname{Arcsin} x + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{\operatorname{Arcsin}^2 x}{2x^2} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\operatorname{Arcsin} x + lx + C.$$

108. VI. **Интегралы** $\int f_n(x)\operatorname{Arctg} x\,dx$ *и* $\int f_n(x)\operatorname{Arccotg} x\,dx$ *найдемъ весьма легко* **интегрированіемъ по частямъ**, *подводя* $f_n(x)$ *подъ знакъ дифференціала.*

Дѣйствительно, такъ какъ $\int f_n(x)\,dx = f_{n+1}(x)$,

такъ что $$f_n(x)\,dx = df_{n+1}(x),$$

то, напр., $$\int f_n(x)\operatorname{Arctg} x\,dx = \int \operatorname{Arctg} x f_n(x)\,dx =$$

$$= \int \operatorname{Arctg} x\,df_{n+1}(x) = f_{n+1}(x)\operatorname{Arctg} x - \int \frac{f_{n+1}(x)}{x^2+1}\,dx;$$

послѣдній же интегралъ найти умѣемъ.

Прим. $$\int (x^2+3x-1)\operatorname{Arctg} x\,dx = \int \operatorname{Arctg} x\,d\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{2x^3+9x^2-6x}{6}\operatorname{Arctg} x - \frac{1}{6}\int \frac{2x^3+9x^2-6x}{x^2+1}\,dx}_{A} = A - \frac{1}{6}\int (2x+9)\,dx +$$

$$+ \frac{1}{6}\int \frac{8x+9}{x^2+1}\,dx = -\frac{x^2+9x}{6} + \frac{2x^3+9x^2-6x+9}{6}\operatorname{Arctg} x + \frac{2}{3}l(x^2+1) + C.$$

109. VII. **Интегралъ** $\int f_{2n-1}(x)\operatorname{Arctg}^2 x\,dx$, *въ которомъ* $f_{2n-1}(x)$ — *цѣлый многочленъ, содержащій* **лишь нечетныя** *степени* x'а, *также найдется помощью* **интегрированія по частямъ.** Дѣйствительно, интегралъ $\int f_{2n-1}(x)\,dx$ содержитъ, очевидно, лишь *четныя* сте-

пени x'а; поэтому можемъ положить, что

$$\int f_{2n-1}(x)\,dx = F_n(x^2) \quad \text{и, слѣд.,} \quad f_{2n-1}(x)\,dx = dF_n(x^2),$$

а потому

$$I = \int f_{2n-1}(x)\operatorname{Arctg}^2 x\,dx = \int \operatorname{Arctg}^2 x\,dF_n(x^2) = \underbrace{F_n(x^2)\operatorname{Arctg}^2 x}_{A} +$$

$$- 2\int F_n(x^2)\operatorname{Arctg} x\,\frac{dx}{x^2+1} = A - 2\int \operatorname{Arctg} x\,\frac{F_n(x^2)}{x^2+1}\,dx.$$

Дѣля теперь $F_n(x^2)$ **на** x^2+1 и обозначая частное черезъ $\varphi_{2n-2}(x^2)$, а остатокъ — черезъ R, при чемъ R — **число постоянное,** имѣемъ:

$$\frac{F_n(x^2)}{x^2+1} = \varphi_{2n-2}(x) + \frac{R}{x^2+1},$$

а слѣд.,

$$I = A - 2\int \operatorname{Arctg} x\,\varphi_{2n-2}(x)\,dx +$$

$$- 2R\int \operatorname{Arctg} x\,\frac{dx}{x^2+1} = A - R\operatorname{Arctg}^2 x - 2\int \operatorname{Arctg} x\,\varphi_{2n-2}(x)\,dx;$$

послѣдній же интегралъ мы найти умѣемъ.

Прим.

$$\int (5x^3 - 7x)\operatorname{Arctg}^2 x\,dx = \int \operatorname{Arctg}^2 x\,d\left(\frac{5x^4}{4} - \frac{7x^2}{2}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{5x^4 - 14x^2}{4}\operatorname{Arctg}^2 x}_{A} - \frac{1}{2}\int (5x^4 - 14x^2)\operatorname{Arctg} x\,\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= A - \frac{1}{2}\int \operatorname{Arctg} x\,\frac{5x^4 - 14x^2}{x^2+1}\,dx = A - \frac{1}{2}\int \operatorname{Arctg} x\left[5x^2 - 19 + \frac{19}{x^2+1}\right]dx =$$

$$= A - \frac{1}{2}\int \operatorname{Arctg} x\,d\left(\frac{5x^3}{3} - 19x\right) - \frac{19}{2}\int \operatorname{Arctg} x\,d\operatorname{Arctg} x =$$

$$= \underbrace{A - \frac{5x^3 - 57x}{6}\operatorname{Arctg} x}_{B} + \frac{1}{6}\int (5x^3 - 57x)\,\frac{dx}{x^2+1} - \frac{19}{4}\operatorname{Arctg}^2 x =$$

$$= B - \frac{19}{4}\operatorname{Arctg}^2 x + \frac{1}{6}\int \left(5x - \frac{62x}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{5x^4 - 14x^2 - 19}{4}\operatorname{Arctg}^2 x - \frac{5x^3 - 57x}{6}\operatorname{Arctg} x + \frac{5x^2}{12} - \frac{31}{6}\,l(x^2+1) + C.$$

Замѣчаніе. Въ нѣкоторыхъ частыхъ случаяхъ интегралъ $\int f_n(x)\,\mathrm{Arctg}^2 x\,dx$, въ которомъ $f_n(x)$ — *цѣлый многочленъ*, содержащій **и четныя, и нечетныя** степени x'а, также можетъ выразиться въ конечномъ видѣ.

Прим.

$$\int (12x^3 + 6x^2 + 4x + 2)\,\mathrm{Arctg}^2 x\,dx = \int \mathrm{Arctg}^2 x\,d(3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x) =$$

$$= \underbrace{(3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x)\,\mathrm{Arctg}^2 x}_{A} - 2\int \mathrm{Arctg}\, x\,\frac{3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x}{x^2 + 1}\,dx =$$

$$= A - 2\int \mathrm{Arctg}\, x\,(3x^2 + 2x - 1)\,dx - 2\int \mathrm{Arctg}\, x\,\frac{dx}{x^2 + 1} =$$

$$= \underbrace{A - \mathrm{Arctg}^2 x}_{B} - 2\int \mathrm{Arctg}\, x\,d(x^3 + x^2 - x) = \underbrace{B - 2(x^3 + x^2 - x)\,\mathrm{Arctg}\, x}_{D} +$$

$$+ 2\int \frac{x^3 + x^2 - x}{x^2 + 1}\,dx = D + 2\int \left\{x + 1 - \frac{2x + 1}{x^2 + 1}\right\} dx = D + x^2 + 2x +$$

$$- 2l(x^2 + 1) - 2\,\mathrm{Arctg}\, x + C = x^2 + 2x + (3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x - 1)\,\mathrm{Arctg}^2 x +$$

$$- 2(x^3 + x^2 - x + 1)\,\mathrm{Arctg}\, x - 2l(x^2 + 1) + C.$$

110. VIII. **Интегралъ** $\int f_n(x)\,\mathrm{Arctg}\,\varphi(x)\,dx$ *найдется въ конечномъ видѣ помощью* **интегрированія по частямъ,** *когда* $\varphi(x)$ — **раціональная дробь.** Дѣйствительно, полагая

$$\int f_n(x)\,dx = f_{n+1}(x) + C \quad \text{и, слѣд.,} \quad f_n(x)\,dx = df_{n+1}(x);$$

имѣемъ: $\int f_n(x)\,\mathrm{Arctg}\,\varphi(x)\,dx = \int \mathrm{Arctg}\,\varphi(x)\,df_{n+1}(x) =$

$$= f_{n+1}(x)\,\mathrm{Arctg}\,\varphi(x) - \int \frac{f_{n+1}(x)\,\varphi'(x)}{1 + [\varphi(x)]^2}\,dx;$$

послѣдній же интегралъ найти съумѣемъ, такъ какъ въ немъ подъинтегральная функція представляетъ раціональную дробь.

Прим. $\int (3x^2 - 2x + 1)\,\mathrm{Arctg}\,\dfrac{x+1}{x}\,dx = \int \mathrm{Arctg}\,\dfrac{x+1}{x}\,d(x^3 - x^2 + x) =$

$$= \underbrace{(x^3 - x^2 + x)\,\mathrm{Arctg}\,\frac{x+1}{x}}_{A} - \int (x^3 - x^2 + x)\,\frac{-\dfrac{dx}{x^2}}{1 + \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2} =$$

$$= A + \int \frac{x^3 - x^2 + x}{2x^2 + 2x + 1}\,dx = A + \frac{1}{2}\int \left\{x - 2 + \frac{5x + 2}{2x^2 + 2x + 1}\right\} dx =$$

$$= (x^3 - x^2 + x)\operatorname{Arctg}\frac{x+1}{x} + \frac{x^2}{4} - x + \frac{5}{8}\,l\,(2x^2 + 2x + 1) - \frac{1}{4}\operatorname{Arctg}(2x+1) + C.$$

Замѣчаніе. Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ интегралъ $\int f(x)\operatorname{Arctg}\varphi(x)\,dx$ можетъ выразиться въ конечномъ видѣ и при ирраціональныхъ функціяхъ $f(x)$ и $\varphi(x)$; напр., $\int \sqrt{x+1}\operatorname{Arctg}\sqrt{x}\,dx = \int \operatorname{Arctg}\sqrt{x}\,d\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right] =$

$$= \underbrace{\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\operatorname{Arctg}\sqrt{x}}_{A} - \frac{1}{3}\int (x+1)^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = A - \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\operatorname{Arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2+x} + \frac{1}{6}\,l\,\frac{\sqrt{x^2+x} - x}{\sqrt{x^2+x} + x} + C.$$

111. IX. Интегралъ $\int \frac{\operatorname{Arctg}\varphi(x)\,dx}{(x-a)^n}$ *найдется въ конечномъ видѣ, когда* n — **цѣлое положительное** *число, большее единицы, а* $\varphi(x)$ — **раціональная дробь**, ибо тогда $\int \frac{\operatorname{Arctg}\varphi(x)\,dx}{(x-a)^n} = \int \operatorname{Arctg}\varphi(x)\,d\left[-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}\right] =$

$$= -\frac{\operatorname{Arctg}\varphi(x)}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\varphi'(x)\,dx}{(x-a)^{n-1}\{1 + [\varphi(x)]^2\}};$$

послѣдній же интегралъ найти умѣемъ.

Прим. 1. $\int \frac{\operatorname{Arctg}\frac{x+1}{x-1}}{(x-2)^3}\,dx = \int \operatorname{Arctg}\frac{x+1}{x-1}\,d\left[-\frac{1}{2(x-2)^2}\right] =$

$$= \underbrace{-\frac{\operatorname{Arctg}\frac{x+1}{x-1}}{2(x-2)^2}}_{A} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-2)^2}\,\frac{-\frac{2dx}{(x-1)^2}}{1 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} = A - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-2)^2(x^2+1)} =$$

$$= -\frac{\operatorname{Arctg}\frac{x+1}{x-1}}{2(x-2)^2} + \frac{1}{10(x-2)} + \frac{2}{25}\,l\,(x-2) - \frac{1}{25}\,l\,(x^2+1) - \frac{3}{50}\operatorname{Arctg}x + C.$$

Прим. 2. $\int \frac{\operatorname{Arctg}x\,dx}{(x-1)^3} = \int \operatorname{Arctg}x\,d\left[-\frac{1}{2(x-1)^2}\right] = -\frac{\operatorname{Arctg}x}{2(x-1)^2} +$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)} = -\frac{\operatorname{Arctg}x}{2(x-1)^2} - \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4}\,l\,(x-1) + \frac{1}{8}\,l\,(x^2+1) + C.$$

112. X. **Интегралы** $\int f_n(x)\,\mathrm{Arcsec}\,x\,dx$ **и** $\int f_n(x)\,\mathrm{Arccosec}\,x\,dx$ *найдемъ* **интегрированіемъ по частямъ**, *подводя* $f_n(x)$ *подъ знакъ дифференціала.* Въ самомъ дѣлѣ,

полагая $\int f_n(x)\,dx = f_{n+1}(x)$, имѣемъ: $f_n(x)\,dx = df_{n+1}(x)$

и, слѣд., напр., $\int f_n(x)\,\mathrm{Arcsec}\,x\,dx = \int \mathrm{Arcsec}\,x\,df_{n+1}(x) =$

$$= f_{n+1}(x)\,\mathrm{Arcsec}\,x - \int \frac{f_{n-1}(x)\,dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$

послѣдній же интегралъ найти умѣемъ.

Прим. 1.

$$\int \mathrm{Arcsec}\,x\,dx = x\,\mathrm{Arcsec}\,x - \int \frac{x\,dx}{x\sqrt{x^2-1}} = x\,\mathrm{Arcsec}\,x - l\,(x+\sqrt{x^2-1}) + C$$

Прим. 2. $\int (6x^2-5x+2)\,\mathrm{Arcsec}\,x\,dx = \int \mathrm{Arcsec}\,x\,d\left(2x^3 - \frac{5x^2}{2} + 2x\right) =$

$$= \frac{4x^3-5x^2+4x}{2}\,\mathrm{Arcsec}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{4x^2-5x+4}{\sqrt{x^2-1}}\,dx =$$

$$= \frac{4x^3-5x^2+4x}{2}\,\mathrm{Arcsec}\,x - \frac{2x-5}{2}\sqrt{x^2-1} - 3l\,(x+\sqrt{x^2-1}) + C.$$

113. XI. **Интегралы** $\int f(x)\,\mathrm{Arcsec}^2\,x\,dx$ **и** $\int f(x)\,\mathrm{Arccosec}^2\,x\,dx$, *въ которыхъ* $f(x)$ — **цѣлый многочленъ**, *содержащій* **лишь нечетныя** *степени* x*'а, найдемъ* **интегрированіемъ по частямъ**, *подводя* $f(x)$ *подъ знакъ дифференціала.* Дѣйствительно, $\int f(x)\,dx$ содержитъ, очевидно, лишь четныя степени x'а, такъ что можемъ положить

$$\int f(x)\,dx = x^2\,\varphi(x^2),$$

гдѣ φ — цѣлый многочленъ; отсюда $f(x)\,dx = d\,[x^2\,\varphi(x^2)]$

и, слѣд., напр., $\int f(x)\,\mathrm{Arcsec}^2\,x\,dx = \int \mathrm{Arcsec}^2\,x\,d\,[x^2\,\varphi(x^2)] =$

$$= \underbrace{x^2\,\varphi(x^2)\,\mathrm{Arcsec}^2\,x}_{A} - 2\int \mathrm{Arcsec}\,x\,\frac{x^2\,\varphi(x^2)\,dx}{x\sqrt{x^2-1}} = A - 2\int \mathrm{Arcsec}\,x\,\frac{\varphi(x^2)\,x\,dx}{\sqrt{x^2-1}};$$

но, полагая $\sqrt{x^2-1}=z$, имѣемъ: $x^2=z^2+1$, $xdx=zdz$,

и $$\int\frac{\varphi(x^2)\,xdx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\varphi(z^2+1)\,dz=z\omega(z^2+1)+C_1=\omega(x^2)\sqrt{x^2-1}+C_1,$$

откуда $$\frac{\varphi(x^2)\,xdx}{\sqrt{x^2-1}}=d\left[\omega(x^2)\sqrt{x^2-1}\right],$$

при чемъ ω — тоже цѣлый многочленъ; а потому

$$\int f(x)\operatorname{Arcsec}^2 x\,dx=A-2\int\operatorname{Arcsec}x\,d\left[\omega(x^2)\sqrt{x^2-1}\right]=$$

$$=\underbrace{A-2\omega(x^2)\sqrt{x^2-1}\operatorname{Arcsec}x}_{B}+2\int\omega(x^2)\sqrt{x^2-1}\,\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=B+2\int\frac{\omega(x^2)}{x}\,dx;$$

послѣдній же интегралъ найти умѣемъ.

Прим. $$\int(x^5-3x^3+x)\operatorname{Arcsec}^2 x\,dx=\int\operatorname{Arcsec}^2 x\,d\frac{2x^6-9x^4+6x^2}{12}=$$

$$=\underbrace{\frac{2x^6-9x^4+6x^2}{12}\operatorname{Arcsec}^2 x}_{A}-\frac{1}{6}\int\operatorname{Arcsec}x\,\frac{(2x^6-9x^4+6x^2)\,dx}{x\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=A-\frac{1}{6}\int\operatorname{Arcsec}x\,\frac{(2x^4-9x^2+6)\,xdx}{\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=A-\frac{1}{6}\operatorname{Arcsec}x\,d\left[\frac{6x^4-37x^2+16}{15}\sqrt{x^2-1}\right]=\frac{2x^6-9x^4+6x^2}{12}\operatorname{Arcsec}^2 x+$$

$$-\frac{6x^4-37x^2+16}{90}\sqrt{x^2-1}\operatorname{Arcsec}x+\frac{3x^4-37x^2}{180}+\frac{8}{45}lx+C.$$

Замѣчаніе. Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ интегралы

$$\int f_n(x)\operatorname{Arcsec}^2 x\,dx \quad\text{и}\quad \int f_n(x)\operatorname{Arccosec}^2 x\,dx$$

могутъ выразиться въ конечномъ видѣ и тогда, когда цѣлый многочленъ $f_n(x)$ содержитъ, *какъ четныя, такъ и нечетныя* степени x'а; напр.,

$$\int(6x^2+2x-1)\operatorname{Arcsec}^2 x\,dx=\int\operatorname{Arcsec}^2 x\,d(2x^3+x^2-x)=$$

$$=\underbrace{(2x^3+x^2-x)\operatorname{Arcsec}^2 x}_{A}-2\int\operatorname{Arcsec}x\,\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=$$

$$= A - 2\int \operatorname{Arcsec} x\, d\left[(x+1)\sqrt{x^2-1}\right] =$$

$$= (2x^3 + x^2 - x)\operatorname{Arcsec}^2 x - 2(x+1)\sqrt{x^2-1}\operatorname{Arcsec} x + 2x + 2lx + C.$$

114. XII. **Интегралы** $\int \frac{\operatorname{Arcsec}^m x\,dx}{x^n}$ и $\int \frac{\operatorname{Arccosec}^m x\,dx}{x^n}$, *въ которыхъ* m *и* n — **цѣлыя положительныя** *числа, при чемъ* $n \geqslant 2$, *найдемъ, полагая* $x = \frac{1}{z}$.

Въ самомъ дѣлѣ, тогда $dx = -\frac{dz}{z^2}$,

и, напр., $\int \frac{\operatorname{Arcsec}^m x\,dx}{x^n} = -\int z^n \operatorname{Arcsec}^m\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z^2} = -\int z^{n-2}\operatorname{Arccos}^m z\,dz,$

а этотъ интегралъ при $n - 2 \geqslant 0$ выражается, какъ мы знаемъ, въ конечномъ видѣ.

Цѣна 1 р. 75 к.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ.

Часть II.

ОПРЕДѢЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Составилъ

Г. Д. Гродскій,

Профессоръ Михайловской Артиллерійской Академіи.

ИЗДАНІЕ ТРЕТЬЕ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

Вас. Остр., 9 линія, № 12.

1912.

КЛАССНАЯ КЛАДОВАЯ
НИКОЛАЕВСКАГО
АРТИЛЛЕРІЙСКАГО УЧИЛИЩА.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ.

Часть II.

ОПРЕДѢЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Составилъ

Г. Д. Гродскій,

Профессоръ Михайловской Артиллерійской Академіи.

ИЗДАНІЕ ТРЕТЬЕ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

Вас. Остр., 9 линія, № 12.

1912.

КЛАССНАЯ ЧИТАЛЬНАЯ
НИКОЛАЕВСКАГО
АРТИЛЛЕРІЙСК. УЧИЛИЩА.
1915.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

стр.

Гл. I. § 1. **Предварительныя теоремы** 1

§ 2. **Понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ** 26

Гл. II. Свойства и вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ.

§ 1. Основныя свойства опредѣленныхъ интеграловъ 40

§ 2. Вычисленіе интеграловъ помощью рядовъ ... 54

§ 3. Формулы квадратуръ 65

§ 4. Опредѣленный интегралъ — какъ функція параметровъ, входящихъ въ его выраженіе .. 88

Гл. III. Интегралы отъ функцій, обращающихся въ безконечность 109

Гл. IV. Интегралы съ безконечными предѣлами.

§ 1. Общія теоремы о такихъ интегралахъ 127

§ 2. Эйлеровы интегралы перваго и втораго вида . 154

§ 3. Приложеніе опредѣленныхъ интеграловъ къ теоріи сходимости безконечныхъ рядовъ .. 170

§ 4. Формула Стирлинга 172

Гл. V. Приложенія интегральнаго исчисленія къ геометріи. 174

Прибавленіе: теорія логариѳмическихъ и показательныхъ функцій на основаніи разсмотрѣнія $\int \frac{dx}{x}$, и теорія круговыхъ и тригонометрическихъ функцій на основаніи разсмотрѣнія $\int \frac{dx}{1+x^2}$ 204

Глава I.

Предварительныя теоремы. Понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ *).

§ 1. Предварительныя теоремы.

1. Участкомъ (a, A) *наз. совокупность* **всѣхъ** *соизмѣримыхъ и несоизмѣримыхъ чиселъ* n, *либо равныхъ* a *или* A, *либо заключающихся между ними,* т.-е. удовлетворяющихъ условіямъ

$$a \leqslant n \leqslant A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

(считаемъ, что $a < A$). Число a наз. **низшей**, а A — **высшей границей** этого участка, разность же $A - a$ наз. его **длиной или протяженіемъ.** Про число n, удовлетворяющее условіямъ (1), мы скажемъ, что оно *принадлежитъ* участку (a, A); наоборотъ, послѣдній *заключаетъ* въ себѣ такое число n. Если два числа b и B принадлежатъ участку (a, A), то говорятъ, что *участокъ* (b, B) *заключается внутри участка* (a, A). Наконецъ, если перемѣнное число x измѣняется такимъ образомъ, что можетъ получить **любое**

*) Я предполагаю, что читатель ужѣ прошелъ систематическій курсъ дифф. исчисленія, но считаю полезнымъ напомнить основныя понятія, въ немъ вводимыя; кромѣ того, для послѣдующаго необходимы нѣкоторыя теоремы, не входящія обыкновенно въ курсъ дифф. исч.

изъ значеній, принадлежащихъ участку (a, A), то говорятъ, что *x измѣняется на участкѣ* (a, A).

2. Предположимъ, что имѣемъ **группу** (*ensemble*) чиселъ:

$$x_1, x_2, \ldots . x_k, x_{k+1}, \ldots ;$$

для краткости будемъ ее обозначать черезъ E.

Если количество этихъ чиселъ конечно, то и группа наз. **конечной**, а если оно безконечно, то и группа **безконечна.** Далѣе, если мы можемъ найти такое положительное число N, что *)

$$|x_k| < N$$

при всякомъ k, то группа E наз. **ограниченной**; если же, какъ бы ни было велико число N, всегда найдемъ въ группѣ E такое число x_n, что

$$x_n > N,$$

то группа эта наз. **неограниченной.**

Ясно между прочимъ, что *всякая* **конечная** *группа чиселъ есть вмѣстѣ съ тѣмъ и* **ограниченная.**

Прим. Группа — 5; 3; 4; 8 — конечная и ограниченная.

Группа — 2; — 10; 3; 11; 11,7; 11,77; 11,777; . . . .

— безконечная, но ограниченная.

Группа $\frac{1}{1-0,9}, \frac{1}{1-0,99}, \frac{1}{1-0,999}, \ldots .$

— безконечная и неограниченная.

3. Если различныя значенія *перемѣннаго* числа x образуютъ *неограниченную* группу, то говорятъ, что это число **растетъ безгранично** или **до безконечности**; короче его называютъ **безконеч-**

*) Черезъ $|x_k|$ принято обозначать абсолютную величину или *модуль* числа x_k, такъ что, напр., $|-2| = 2$.

ностью и обозначаютъ знакомъ $\pm\infty$, при чемъ $+\infty$ означаетъ *положительное* число, растущее безгранично, $a-\infty$ означаетъ *отрицательное* число, абсол. величина коего растетъ безгранично. Хотя безгранично-растущее число можетъ въ нѣкоторые моменты своего измѣненія быть и очень малымъ, но обыкновенно, говоря о безконечности, разумѣютъ число, которое **уже стало** *несравнимо больше всѣхъ, одновременно разсматриваемыхъ нами,* **конечныхъ** *чиселъ.*

Если число $|x|$ растетъ до ∞, то, очевидно, $\left|\frac{1}{x}\right|$ можетъ быть сдѣлано сколь угодно малымъ; напр., чтобы имѣть, что

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{n},$$

достаточно взять $|x| > n.$

4. Опредѣленіе 1. **Безконечно-малою** *наз. такое* **перемѣнное** *число* α, *абсолютная величина котораго можетъ быть сдѣлана и* **при дальнѣйшемъ своемъ измѣненіи все время остается** *меньше сколь угодно малаго, напередъ задаваемаго положительнаго числа* ε.

Слѣдствіе. Если число $|x|$ *все время* растетъ и притомъ безгранично, то $\frac{1}{x}$ безк.-мало, и обратно.

Замѣчаніе. Очевидно, что безк.-малая въ первый періодъ своего измѣненія можетъ имѣть и очень большія значенія; но обыкновенно, говоря о безк.-малыхъ, считаютъ, что *онъ* **уже стали** *несравнимо меньше всѣхъ, разсматриваемыхъ одновременно съ ними,* **конечныхъ** *чиселъ.*

5. Опредѣленіе 2. **Предѣломъ** *перемѣннаго числа* x *наз. такое* **постоянное** *число* x_0, *разность между которымъ и перемѣннымъ безк.-мала.*

Чтобы обозначить, что x_0 есть предѣлъ числа x, пишутъ:

$$x_0 = \text{Пред. } (x) \text{ или } x_0 = \text{Lim } x^*).$$

*) Lim, т.-е. Limite или Limes — предѣлъ.

Слѣдствіе 1. Если $x_0 = \text{Пред.}\, x$, то, обозначая черезъ α безк.-малую величину $x - x_0$, имѣемъ: $x - x_0 = \alpha$,

откуда $$x = x_0 + \alpha.$$

Слѣдствіе 2. Такъ какъ $\alpha - 0 = \alpha =$ безк.-малой, то, значитъ, *предѣлъ безк.-малой равенъ нулю.*

Замѣчаніе 1. Число x_0 — нѣкоторое опредѣленное постоянное число, существующее *независимо* отъ перемѣннаго числа x, и разсмотрѣніе x_0, *какъ предѣла числа* x, имѣетъ цѣлью полученіе соотношеній между постоянными числами $x_0, y_0, z_0, \ldots$ на основаніи соотношеній, существующихъ между перемѣнными числами $x, y, z, \ldots$, для коихъ $x_0, y_0, z_0, \ldots$ служатъ предѣлами, при чемъ средства для достиженія этой цѣли даетъ **теорія предѣловъ**, т.-е. совокупность всѣхъ теоремъ о предѣлахъ.

Замѣчаніе 2. Такъ какъ нуль меньше всякаго положительнаго числа, какъ бы оно мало ни было, то постоянное число, равное нулю, можно считать за частный случай безк.-малой величины; а слѣд., любое постоянное число C можно разсматривать, какъ частный случай перемѣннаго числа, всѣ значенія коего равны другъ другу и равны его предѣлу. При этомъ, какъ легко видѣть, всѣ теоремы о предѣлахъ перемѣнныхъ чиселъ вообще — примѣнимы и къ этому частному случаю.

6. Теорема *). *Если x и y — перемѣнныя числа, имѣющія предѣлами x_0 и y_0, причемъ всегда $x \leqslant y$,*

то и $$x_0 \leqslant y_0.$$

Дѣйствительно, допустимъ, что $x_0 > y_0$,

т.-е. $$x_0 = y_0 + a, \text{ гдѣ } a > 0;$$

*) Теорема эта доказывается здѣсь потому, что на нее часто приходится ссылаться при примѣненіи теоріи предѣловъ, а между тѣмъ при изложеніи теоріи предѣловъ ее обыкновенно не доказываютъ.

тогда, полагая $x = x_0 + \xi$ и $y = y_0 + \eta$,

при чемъ ξ и η — безк.-малыя, получаемъ:

$$x - y = (x_0 + \xi) - (y_0 + \eta) = x_0 - y_0 + \xi - \eta = a + \xi - \eta > 0,$$

ибо a — число конечное; а это неравенство противорѣчитъ условію $x \leqslant y$.

Слѣдствіе. *Если x перемѣнное число, предѣлъ коего есть x_0, и если всегда $x \leqslant N (x \geqslant N)$, то и $x_0 \leqslant N (x_0 \geqslant N)$.*

7. Теорема. *Если перемѣнное число x растетъ* **все время,** *но* **не безгранично,** *то оно навѣрное стремится при этомъ къ нѣкоторому предѣлу M_0.*

Пусть $$x_1, x_2, \ldots . x_k, x_{k+1}, \ldots ,$$

суть значенія, принимаемыя числомъ x одно за другимъ, при чемъ

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots . < x_k < x_{k+1} < \ldots .$$

и $$x_k < N$$ **при всякомъ** k.

Разсматривая совокупность **всѣхъ** *чиселъ, какія только можно себѣ вообразить,* мы можемъ разбить ихъ на двѣ группы: въ первую (e) отнесемъ всѣ чи́сла m, *которыя не больше* **хоть одного** *изъ чиселъ* x_n, такъ что $m \leqslant x_n$, а во вторую (E) — всѣ тѣ числа M, *которыя больше* **всѣхъ** x_k, такъ что $M > x_k$ *при любомъ* k. Тогда, очевидно, *если число* m_1 *принадлежитъ къ группѣ* e, *то и всякое* **меньшее** *число* m_2 *принадлежитъ къ ней же,* ибо изъ неравенствъ

$$m_1 \leqslant x_n \quad \text{и} \quad m_2 < m_1$$

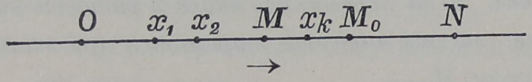
получаемъ, что $m_2 < x_n$; обратно, *если число* M_1 *принадлежитъ къ группѣ* E, *то и всякое* **большее** *число* M_2 *принадлежитъ къ ней же,* ибо неравенства:

$$M_2 > M_1 \quad \text{и} \quad M_1 > x$$

даютъ $$M_2 > x.$$

Возьмемъ теперь какую-либо прямую (черт. 1) и отложимъ на ней отъ одной и той же точки O отрѣзки Ox_1, Ox_2,....Ox_k,.... и ON, выражаемые числами x_1, x_2,....x_k,.... и N; затѣмъ заставимъ точку M двигаться по этой прямой изъ $-\infty$ къ $+\infty$. Каждому ея положенію отвѣчаетъ нѣкоторое опредѣленное число M, выражающее длину соотвѣтствующаго отрѣзка OM, при чемъ эти числа сначала принадлежатъ къ группѣ e,

Черт. 1.



а въ концѣ—къ группѣ E, такъ что при нѣкоторомъ положеніи M_0 движущейся точки совершается переходъ числа M изъ первой группы во вторую, при чемъ это положеніе M_0 — единственное, ибо изъ сдѣланныхъ выше замѣчаній насчетъ m_2 и M_2 слѣдуетъ, что обратный переходъ—изъ E въ e—невозможенъ. *Число* M_0, *выражающее длину отрѣзка* OM_0, *есть предѣлъ чиселъ*

$$x_1,\ x_2,\ldots.x_k,\ldots.$$

Дѣйствительно, во-первыхъ, мы имѣемъ, что

$$M_0 > x_k \text{ при всякомъ } k,$$

ибо, предположивъ, что, напр., $M_0 \leqslant x_{82}$, имѣли бы, что $M_0 < x_{83}$ и, слѣд., $M = x_{83} - a$, гдѣ $a > 0$,

откуда $$M_0 + \frac{a}{2} = x_{83} - \frac{a}{2} < x_{83},$$

такъ что число $M_0 + \frac{a}{2}$ принадлежало бы къ группѣ e, а слѣд., меньшее число M_0 не отвѣчало бы переходу отъ этой группы ко второй.

Во-вторыхъ, разность $M_0 - x$ можетъ быть сдѣлана сколь

угодно малой, ибо, допустивъ, что $M_0 - x_k > a$ при всякомъ k,

получили бы $M_0 - a > x_k$. при всякомъ k,

такъ что число $M_0 - a$ принадлежало бы къ группѣ E, а слѣд., большее число M_0 опять таки не отвѣчало бы переходу отъ группы e къ E.

Наконецъ, если $M_0 - x_n < \varepsilon$, то и $M_0 - x_p < \varepsilon$ при всякомъ $p > n$, ибо тогда $x_p > x_n$.

Такимъ образомъ разность $M_0 - x$ можетъ быть сдѣлана, и при дальнѣйшемъ измѣненіи числа x — все время остается меньше любаго напередъ задаваемаго числа ε, т.-е. эта разность безк.-мала.; слѣд.,

$$M_0 = \text{Пред. } x.$$

Такимъ же образомъ можно доказать, что *если число x убываетъ все время, но не безгранично, то оно стремится при этомъ къ нѣкоторому предѣлу m_0.*

8. Теорема. *Если число y, принимающее послѣдовательно значенія $y_1, y_2, \ldots y_k, y_{k+1}, \ldots$ не растетъ безгранично, то существуетъ число M, характеризуемое слѣдующими двумя свойствами:*

1) *$M \geqslant$ всякаго y'а*

и 2) *$M - y$ можно сдѣлать либо нулемъ, либо сколь угодно малымъ.*

При доказательствѣ различимъ два случая.

I) *Среди y'овъ есть такой — напр., y_n — который больше* всѣхъ *прочихъ (нѣкоторымъ равенъ).* Тогда ясно, что этотъ y_n и есть искомое число M, при чемъ второе свойство удовлетворяется подъ видомъ равенства:

$$(M - y_k)_{k=n} = 0.$$

II) *Нѣтъ такого у'а, который былъ бы больше всѣхъ остальныхъ.* Въ этомъ случаѣ построимъ новую группу чиселъ (z) слѣдующимъ образомъ: $z_1 = y_1$; $z_2 =$ первому изъ y'овъ, который больше z_1; $z_3 =$ первому изъ y'овъ, который больше z_2; и т. д... Тогда ясно, что группа чиселъ z безконечна, но *ограничена*, ибо z'ы выбираются среди y'овъ; кромѣ того,

$$z_1 < z_2 < z_3 < \ldots;$$

значитъ (№ 7), числа z стремятся къ нѣкоторому предѣлу z_0; *это z_0 и есть искомое M.*

Дѣйствительно, всякій y меньше одного изъ z, а послѣдній $< M$; слѣд., всякій $y < M$.

Съ другой стороны $M - z$ можно уменьшить, какъ угодно, а слѣд., это можно сдѣлать съ $M - y$, ибо всякій z есть *одинъ изъ y'овъ.*

Число M наз. **высшей границей** y'овъ («Obere Grenze», «Limite supérieure»). Точно такъ же докажемъ, что *если числа y не убываютъ безгранично, то у нихъ существуетъ* **низшая граница** m («Untere Grenze», «Limite inférieure»), *характеризуемая свойствами:*

1) $m \leqslant$ всякаго y

и 2) $y - m$ можно сдѣлать нулемъ либо сколь угодно малымъ.

Прим. 1. Для группы 0; 0,02; 0,4; 0,3; 0,36; 0,366; 0,3666;....

имѣемъ: $M = 0{,}4; \quad m = 0,$

Прим. 2. Для группы 0; 0,2; 0,3; 0,36; 0,366; 03666;....

имѣемъ: $M = \frac{36-3}{90} = \frac{11}{30}; \quad m = 0.$

9. Теорема 1. *Если имѣемъ двѣ безконечныхъ группы чиселъ n_k и N_i, при чемъ* **всякое** *число первой группы меньше* **любаго** *числа второй, разность же $N_k - n_k$* **соотвѣтственныхъ** *чиселъ*

идетъ къ нулю по мѣрѣ возрастанія k до ∞, то чѝсла обѣихъ группъ имѣютъ предѣлъ, притомъ одинъ и тотъ же.

Дѣйствительно, на основаніи предъидущаго № заключаемъ, что чѝсла n_k имѣютъ нѣкоторую «высшую границу» M, ибо всѣ они меньше, напр., чѣмъ N_1; а числа N_i имѣютъ нѣкоторую «низшую границу» m, ибо всѣ они больше, напр., чѣмъ n_1; такимъ образомъ

$$n_k \leqslant M, \quad m \leqslant N_k,$$

при чемъ разности $M - n_k$ и $N_k - m$ могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми. Отсюда слѣдуетъ, что имѣемъ еще и неравенства:

$$M \leqslant N_k, \ n_k \leqslant m \text{ при всякомъ } k,$$

ибо, если бы, напр., имѣли, что

$$M > N_{143}, \text{ т.-е. } M = N_{143} + a, \text{ гдѣ } a > 0,$$

то получили бы, что

$$M - n_k = (N_{143} + a) - n_k = (N_{143} - n_k) + a > a,$$

а это противорѣчитъ второму свойству верхней границы M.

Итакъ, $\quad n_k \leqslant M \leqslant N_k$ и $N_k \geqslant m \geqslant n_k$ . . . . . (2);

вычитая, получаемъ: $-N_k + n_k \leqslant M - m \leqslant N_k - n_k$,

т.-е. $\quad -(N_k - n_k) \leqslant M - m \leqslant N_k - n_k$,

такъ что *постоянное* число $M - m$ заключается между безконечно-малыми числами $-(N_k - n_k)$ и $N_k - n_k$; значитъ,

$$M - m = 0, \text{ т.-е. } M = m.$$

Но неравенства (2) еще даютъ:

$$M - n_k < N_k - n_k \text{ и } N_k - M < N_k - n_k;$$

слѣд., разности $M - n_k$ и $N_k - M$ — безконечно-малы, а, значитъ,

$$M = \text{Пред. } (n_k)_{k=\infty} = \text{Пред. } (N_k)_{k=\infty}.$$

10. Теорема. *Пусть перемѣнное y принимаетъ послѣдовательно значенія $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$; тогда необходимое и достаточное условіе того, чтобы y_n имѣло предѣлъ при увеличеніи n до ∞, состоитъ въ томъ, чтобы $y_{n+p} - y_n$ стремилось къ нулю при увеличеніи n до ∞,* **каково бы ни было положительное число** p.

Дѣйствительно, допустимъ, что y_n имѣетъ предѣлъ, напр., y_0; тогда, положивъ

$$y_0 - y_n = \alpha_n,$$

имѣемъ, что α_n идетъ къ нулю при увеличеніи n по ∞; поэтому

$$\text{Пред. } (y_{n+p} - y_n)_{n=\infty} = \text{Пред. } (y_{n+p} - y_0 + y_0 - y_n)_{n=\infty} =$$
$$= \text{Пред. } (y_{n+p} - y_0)_{n=\infty} + \text{Пред. } (y_0 - y_n)_{n=\infty} = 0,$$

а слѣд., помянутое условіе *необходимо*.

Обратно — пусть оно выполнено; разность $y_{n+k} - y_n$ при *данномъ* n мѣняется съ измѣненіемъ k; пусть **высшая граница** ея *абсолютной величины* будетъ ε_n, такъ что

$$|y_{n+k} - y_n| \leqslant \varepsilon_n \text{ при любомъ } k > 0,$$

при чемъ *всякому n отвѣчаетъ свое* ε_n и, по условію,

$$\text{Пред. } (\varepsilon_n)_{n=\infty} = 0.$$

Тогда

$$|y_{n+p} - y_n| \leqslant \varepsilon_n,$$

т.-е.

$$-\varepsilon_n \leqslant y_{n+p} - y_n \quad \text{и} \quad y_{n+p} - y_n \leqslant \varepsilon_n,$$

откуда

$$y_n - \varepsilon_n \leqslant y_{n+p}, \quad y_{n+p} \leqslant y_n + \varepsilon_n;$$

тѣмъ болѣе

$$y_n - \varepsilon_n < y_{n+p} + \varepsilon_{n+p}, \quad y_{n+p} - \varepsilon_{n+p} < y_n + \varepsilon_n,$$

гдѣ ε_{n+p} есть высшая граница абсолютной величины разности $y_{(n+p)+k} - y_{(n+p)}$ при всевозможныхъ положительныхъ k. Такимъ образомъ, будетъ ли $m > n$ или $m < n$, всегда имѣемъ:

$$y_m - \varepsilon_m < y_n + \varepsilon_n,$$

при чемъ еще $(y_n + \varepsilon_n) - (y_n - \varepsilon_n) = 2\varepsilon =$ безк.-малой;

слѣд., числа $y_m - \varepsilon_m$ и $y_n + \varepsilon_n$ удовлетворяютъ условіямъ предъидущей теоремы и, значитъ, имѣютъ нѣкоторый общій предѣлъ y_0;

а такъ какъ $\quad$ Пред. $(\varepsilon_n)_{n\ldots\infty} = 0,$

то и $\quad$ Пред. $(y_n)_{n\ldots\infty} = y_0.$

11. **Опредѣленіе 1.** *Перемѣнная* **величина**, *значенія которой не задаются и не измѣряются* **непосредственно**, *но опредѣляются, благодаря заданію значеній* **другихъ** *перемѣнныхъ, наз. ихъ* **функціей**; они же наз. **независимыми перемѣнными** или **аргумѣнтами.**

Задать функцію — *значитъ указать средства и способы для опредѣленія ея значеній, отвѣчающихъ произвольно выбираемымъ значеніямъ аргументовъ.*

Одинъ изъ наиболѣе простыхъ и удобныхъ способовъ заданія функціи — указаніе ур-нія, связывающаго ея величину съ соотвѣтствующими величинами независимыхъ перемѣнныхъ; напр.,

$$u = x^2 + y^2, \quad v = x^3 \sin\frac{z}{y}, \text{ и т. п.}$$

Поэтому и вообще для обозначенія того, что U есть функція перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots$, пишутъ:

$$U = f(x, y, z, \ldots) \text{ или } U = \varphi(x, y, z, \ldots) \text{ и т. п.,}$$

при чемъ съ измѣненіемъ характера зависимости мѣняютъ и **характеристику функцій**, т.-е. буквы $f, \varphi, \psi, \ldots$, такъ что

$$f(x, y, z, \ldots) \equiv f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots),$$

а $\quad f(x, y, z, \ldots) \not\equiv \varphi(x, y, z, \ldots).$

Если каждой системѣ аргументовъ отвѣчаетъ лишь одно значеніе ихъ функціи, то послѣдняя наз. **однозначной**; если же хотя бы нѣкоторымъ системамъ значеній аргументовъ отвѣчаетъ нѣсколько значеній ихъ функціи, то она наз. **многозначной**; напр., функція x^2+y^3 однозначна, а функція $\sqrt{x^2+y^3}$ двузначна. Если для каждой системы значеній аргументовъ будемъ разсматривать у многозначной функціи лишь какое-либо одно изъ ея значеній, то получимъ нѣкоторую однозначную функцію; напр., у $\sqrt{x^2+y^3}$ можно разсматривать отдѣльно либо $+\sqrt{x^2+y^3}$, либо $-\sqrt{x^2+y^3}$. Такимъ образомъ изученіе многозначныхъ функцій сводится на изученіе однозначныхъ; поэтому дальше рѣчь идетъ вездѣ лишь о послѣднихъ.

12. **Опредѣленіе 2.** *Функція аргумента x наз.* **опредѣленной на участкѣ** (a, A) *послѣдняго, когда* **каждому** *значенію x, принадлежащему этому участку, отвѣчаетъ нѣкоторое значеніе функціи.*

13. Разность между двумя послѣдовательными значеніями перемѣнной наз. **приращеніемъ** перваго ея значенія и обозначается значкомъ Δ; напр., $x_1 - x$ есть приращеніе x'а и обозначается черезъ Δx; $f(x_1)-f(x)$ есть приращеніе функціи $f(x)$ и обозначается черезъ $\Delta f(x)$; и т. д.

Опредѣленіе 3. *Функція $f(x)$, опредѣленная на участкѣ (a, A), наз.* **непрерывной** *около принадлежащаго ему частнаго значенія x_0 аргумента, когда ея приращеніе, отвѣчающее безк.-малому приращенію аргумента,* **само безк.-мало**, *т.-е. когда $f(x_0+h)-f(x_0)$ идетъ къ нулю вмѣстѣ съ h.*

При этомъ если $x_0 = a$, то, конечно, числу h можно давать лишь положительныя значенія; если $x_0 = A$ — то лишь отрицательныя; а если $a < x_0 < A$, то h можетъ быть и > 0, и < 0.

Теорема 1. *Если функція $f(x)$ опредѣлена на нѣкоторомъ участкѣ (a, A), заключающемъ число x_0, и если она непрерывна около этого x_0, то при подведеніи x къ x_0, какъ къ предѣлу, со-*

отвѣтствующія значенія самой функціи также стремятся къ предѣлу, при чемъ онъ равенъ $f(x_0)$.

Дѣйствительно, изъ условій теоремы вытекаетъ, во-первыхъ, что значеніе $f(x_0)$ есть опредѣленное, конечное число, а во-вторыхъ, что $f(x) - f(x_0)$ безк.-мало, когда $x - x_0$ безк.-мало; а это и значитъ, что

$$f(x_0) = \text{Пред. } [f(x)]_{x \ldots x_0}.$$

Теорема 2 (*обратная*). *Если функція* $f(x)$ *опредѣлена на участкѣ* (a, A), *заключающемъ число* x_0, *и если*

$$\text{Пред. } \underline{[f(x)] = f(x_0)},$$

то эта функція непрерывна около x, *равнаго* x_0, ибо изъ допущеннаго равенства слѣдуетъ, что $f(x) - f(x_0)$ идетъ къ нулю одновременно съ $x - x_0$.

Эти два предложенія устанавливаютъ связь между *Теоріей Предѣловъ* и *Теоріей Непрерывности*, такъ что теоремы первой суть слѣдствія теоремъ второй, и обратно.

14. Опредѣленіе 4. *Функція* $f(x)$, *опредѣленная на участкѣ* (a, A), *наз.* **непрерывной на всемъ этомъ участкѣ**, *когда она непрерывна около всякаго, принадлежащаго ему, значенія аргумента.*

Теорема Коши. *Если функція* $f(x)$ *на всемъ участкѣ* (a, A) *опредѣлена и непрерывна, а на краяхъ его имѣетъ* **разные знаки**, *то непремѣнно обращается въ нуль хотя при одномъ промежуточномъ значеніи* x*'а.*

Положимъ сначала, что $f(x)$, при возрастаніи x отъ a до A, сама тоже *все время растетъ* (такая функція наз. **возрастающей** на участкѣ $[a, A]$) и что, слѣд., $f(a) < 0$, $f(A) > 0$. Тогда при нѣкоторомъ промежуточномъ между a и A значеніи x'а — напр., при $x = x_0$ — она превратится изъ отрицательной въ положительную, такъ что

$$f(x_0 - h) < 0 < f(x_0 + h) \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

когда $h > 0$. Но такъ какъ эта функція опредѣлена на всемъ участкѣ (a, A), то $f(x_0)$ есть **опредѣленное постоянное** число, при чемъ, по условію, еще

$$f(x_0 + h) > f(x_0) > f(x_0 - h);$$

вычитая отсюда неравенства (3), имѣемъ:

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 - h) - f(x_0 + h)$$

или $$\alpha > f(x_0) > -\alpha,$$

гдѣ $$\alpha = f(x_0 + h) - f(x_0 - h);$$

такъ какъ α, вслѣдствіе непрерывности $f(x)$, идетъ къ нулю вмѣстѣ съ h, число же $f(x_0)$ — *постоянно,* то отсюда и заключаемъ, что $f(x_0) = 0$.

Подобнымъ же образомъ докажемъ эту теорему въ случаѣ, когда $f(x)$ на участкѣ (a, A) *все время убываетъ*. Наконецъ, если $f(x)$ на участкѣ (a, A) *то растетъ, то убываетъ*, то легко видѣть, что теорема тоже будетъ вѣрна, но только $f(x)$ обратится въ нуль на этомъ участкѣ столько разъ, сколько она перемѣняетъ знакъ.

Это предложеніе долго считалось очевиднымъ; впервые счелъ нужнымъ его доказать французскій математикъ Коши (Cauchy, 1780—1857; см. его Cours d'Analyse de l'Ecole royale polytechnique; стр. 460), при чемъ въ его редакціи оно представляло самостоятельную теорему; но его доказательство ея не вполнѣ строго.

Слѣдствіе. *Если $f(x)$ опредѣлена и непрерывна на всемъ участкѣ (a, A), то отъ одного своего значенія къ другому она переходитъ,* **проходя черезъ всѣ промежуточныя между ними значенія** [подобное измѣненіе функціи наз. **текучимъ** (fließende variation)].

Дѣйствительно, взявъ **любое**, промежуточное между $f(a)$ и $f(A)$, число N, разсмотримъ новую функцію $\varphi(x) \equiv f(x) - N$; она, очевидно, тоже опредѣлена и непрерывна на всемъ участкѣ

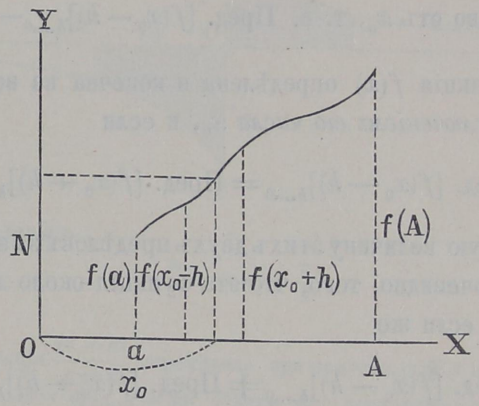
(a, A), при чемъ еще

$$\varphi(a) = f(a) - N < 0, \text{ а } \varphi(A) = f(A) - N > 0;$$

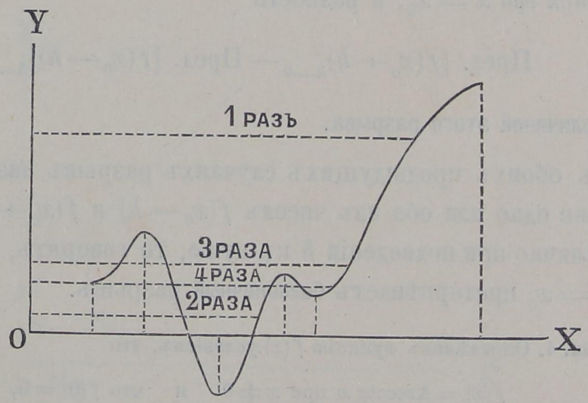
слѣд., при одномъ или при нѣсколькихъ промежуточныхъ между a и A значеніяхъ x_0 аргумента будемъ имѣть

$$\varphi(x_0) = 0, \text{ т.-е. } f(x_0) - N = 0;$$

Черт. 2.



Черт. 3.



иначе говоря, на участкѣ (a, A) *функція* $f(x)$ одинъ разъ (черт. 2), либо нѣсколько (черт. 3), получаетъ величину N.

15. Положимъ, что $f(x)$ *опредѣлена и, слѣд., конечна на всемъ участкѣ* (a, A); возьмемъ на немъ какое-либо число x_0 и допустимъ, что разность $f(x) - f(x_0)$ при подведеніи x къ x_0 идетъ къ нѣкоторому числу H, *отличному отъ нуля*. Тогда говорятъ, что $f(x)$ **разрывается** при $x = x_0$, и число H наз. **величиной разрыва**, при чемъ различаютъ **разрывъ вправо отъ** x_0,

т.-е. $$\text{Пред. } [f(x_0 + h)]_{h \dots 0} - f(x_0),$$

и разрывъ влѣво отъ x_0, т.-е. $\text{Пред. } [f(x_0 - h)]_{h \dots 0} - f(x_0)$.

Если функція $f(x)$ опредѣлена и конечна на всемъ участкѣ (a, A), *за исключеніемъ его числа* x_0, и если

$$\text{Пред. } [f(x_0 - h)]_{h \dots 0} = \text{Пред. } [f(x_0 + h)]_{h \dots 0},$$

то, беря общую величину этихъ двухъ предѣловъ за значеніе $f(x_0)$, достигнемъ, очевидно, того, что эта функція около $x = x_0$ будетъ непрерывна; если же

$$\text{Пред. } [f(x_0 - h)]_{h \dots 0} \neq \text{Пред. } [f(x_0 + h)]_{h \dots 0},$$

то функція $f(x)$ **непрерывна влѣво отъ** x_0 **и вправо отъ** x_0, *но разрывается* **при** $x = x_0$, и разность

$$\text{Пред. } [f(x_0 + h)_{h \dots 0} - \text{Пред. } [f(x_0 - h)]_{h \dots 0}$$

наз. **величиной этого разрыва.**

Въ обоихъ предыдущихъ случаяхъ разрывъ наз. **конечнымъ.** Если же одно или оба изъ чиселъ $f(x_0 - h)$ и $f(x_0 + h)$ растутъ безгранично при подведеніи h къ нулю, то говорятъ, что функція при $x = x_0$ претерпѣваетъ **безконечный** разрывъ.

Прим. 1. Опредѣливъ функцію $f(x)$ условіемъ, что

$$f(x) = \operatorname{Arccotg} x \text{ при } x \neq 0 \quad \text{и} \quad \text{что } f(0) = 0,$$

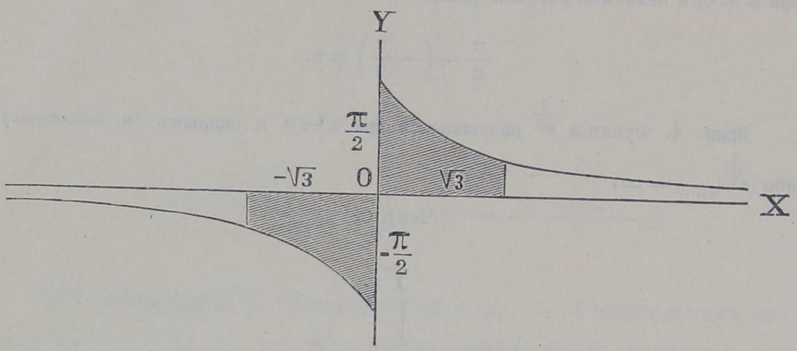
находимъ, что при $x = 0$ она разрывается, ибо

$$\text{Пред. } (\operatorname{Arccotg} \varepsilon)_{\varepsilon \dots 0} = \frac{\pi}{2}, \text{ а Пред. } [\operatorname{Arccotg} (-\varepsilon)]_{\varepsilon \dots 0} = -\frac{\pi}{2};$$

при этомъ разрывъ **вправо** равенъ

$$\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

Черт. 4.

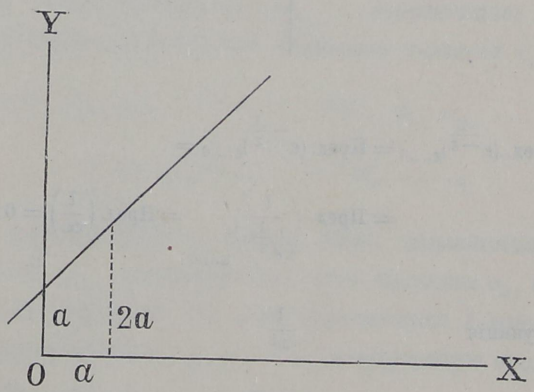


а разрывъ **влѣво** равенъ

$$-\frac{\pi}{2} - 0 = -\frac{\pi}{2}.$$

Прим. 2. Функція $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$ опредѣлена при всякомъ $x \neq a$ и равна $x + a$; такъ какъ Пред. $(x + a)_{x \ldots a} = 2a$, будетъ ли x подходить къ a съ меньшей

Черт. 5.



или съ большей стороны, то, беря **по нашему произволу** $2a$ за значеніе этой функціи при $x = a$, дѣлаемъ ее непрерывною около всякаго x и равною всегда $x + a$.

Прим. 3. Функція Arccotg x не опредѣлена при $x = 0$; и такъ какъ

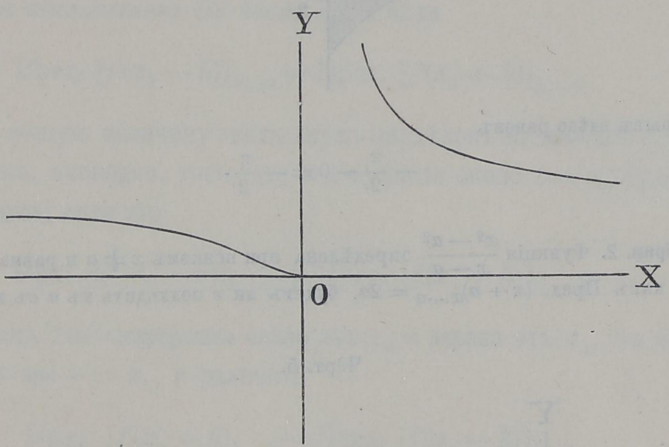
$$\text{Пред. } (\text{Arccotg } \varepsilon)_{\varepsilon \ldots 0} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{а Пред. } [\text{Arccotg } (-\varepsilon)]_{\varepsilon \ldots 0} = -\frac{\pi}{2},$$

то функція эта, будучи непрерывною **вправо** и **влѣво** отъ нуля, разрывается **при** $x = 0$, и величина разрыва равна

$$\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Прим. 4. Функція $e^{\frac{1}{x}}$ разрывается **при** $x = 0$ и разрывъ ея *безконеченъ*, ибо $(e^{\frac{1}{\varepsilon}})_{\varepsilon \ldots 0} = \infty$,

Черт. 6.



а $$\text{Пред. } (e^{\frac{1}{-\varepsilon}})_{\varepsilon \ldots 0} = \text{Пред. } (e^{-\frac{1}{\varepsilon}})_{\varepsilon \ldots 0} =$$

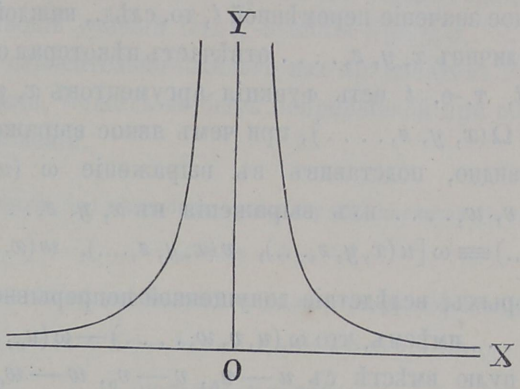
$$= \text{Пред. } \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{\varepsilon}}}\right)_{\varepsilon \ldots 0} = \text{Пред. } \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0.$$

Прим. 5. Функція $\frac{1}{x^2}$

разрывается **при** $x = 0$

ибо $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x \ldots \pm 0} = \infty.$

Черт. 7.



16. **Опредѣленіе 5.** *Функція* $f(x, y, z, \ldots)$ *нѣсколькихъ перемѣнныхъ* x, y, $z, \ldots$ *наз. непрерывной около системы ихъ частныхъ значеній* $x_0, y_0, z_0, \ldots$, *когда ея приращеніе, отвѣчающее безк.-малымъ приращеніямъ* $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \ldots$ *этихъ перемѣнныхъ, само безк.-мало, т.-е. когда разность*

$$f(x_0 + \Delta x_0,\ y_0 + \Delta y_0,\ z_0 + \Delta z_0, \ldots) - f(x_0, y_0, z_0, \ldots)$$

идетъ къ нулю при подведеніи **всѣхъ** $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \ldots$ *къ нулю.*

Теорема. *Если функціи* $u, v, w, \ldots$ *аргументовъ* $x, y, z, \ldots$ *непрерывны около системы ихъ частныхъ значеній* $x_0, y_0, z_0, \ldots$, *при чемъ* $u(x_0, y_0, z_0, \ldots) = u_0$, $v(x_0, y_0, z_0, \ldots) = v_0$,

$$w(x_0, y_0, z_0, \ldots) = w_0, \ldots,$$

и если t *есть функція* ω *этихъ, такъ называемыхъ,* **сложныхъ чиселъ** $u, v, w, \ldots$, *непрерывная около системы* $u_0, v_0, w_0, \ldots$ *ихъ частныхъ значеній, то эта перемѣнная* t *представляетъ функцію аргументовъ* $x, y, z, \ldots$, *непрерывную около системы ихъ значеній* $x_0, y_0, z_0, \ldots$

Во-первыхъ, такъ какъ каждой допустимой системѣ значеній аргументовъ $x, y, z, \ldots$ отвѣчаетъ система опредѣленныхъ зна-

ченій сложныхъ чиселъ $u, v, w, \ldots$, а ей отвѣчаетъ нѣкоторое опредѣленное значеніе перемѣнной t, то, слѣд., каждой допустимой системѣ величинъ $x, y, z, \ldots$ отвѣчаетъ нѣкоторая опредѣленная величина t, т.-е. t есть функція аргументовъ $x, y, z, \ldots$ — напр., $t = \Omega(x, y, z, \ldots)$, при чемъ явное выраженіе Ω получимъ, очевидно, подставивъ въ выраженіе $\omega(u, v, w, \ldots)$ вмѣсто $u, v, w, \ldots$ ихъ выраженія въ $x, y, z, \ldots$, такъ что $\Omega(x, y, z, \ldots) \equiv \omega[u(x, y, z, \ldots), v(x, y, z, \ldots), w(x, y, z, \ldots), \ldots]$.

Во-вторыхъ, вслѣдствіе допущенной непрерывности функцій $\omega, u, v, w, \ldots$ имѣемъ, что $\omega(u, v, w, \ldots) - \omega(u_0, v_0, w_0, \ldots)$ идетъ къ нулю вмѣстѣ съ $u - u_0, v - v_0, w - w_0, \ldots$ а послѣднія въ свою очередь идутъ къ нулю вмѣстѣ съ

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad z - z_0, \ldots;$$

но
$$\omega(u, v, w, \ldots) - \omega(u_0, v_0, w_0, \ldots) \equiv$$
$$\equiv \Omega(x, y, \ldots) - \Omega(x_0, y_0, \ldots);$$

слѣд.,
$$\Omega(x, y, z, \ldots) - \Omega(x_0, y_0, z_0, \ldots)$$

идетъ къ нулю одновременно съ $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \ldots$, а это и значитъ, что $\Omega(x, y, z, \ldots)$ непрерывна около системы величинъ $x_0, y_0, z_0, \ldots$ аргументовъ $x, y, z, \ldots$

Слѣдствіе. Если $\text{Пред.}\,[\omega(u, v, \ldots)]_{\substack{u \ldots u_0 \\ v \ldots v_0}} = \omega(u_0, v_0, \ldots)$

и
$$u_0 = \text{Пред.}\,(u)_{\substack{x \ldots x_0 \\ y \ldots y_0 \\ \ldots\ldots}}, \quad v_0 = \text{Пред.}\,(v)_{\substack{x \ldots x_0 \\ y \ldots y_0 \\ \ldots\ldots}}, \ldots$$

то
$$\text{Пред.}\,[\Omega(x, y, z, \ldots)]_{\substack{x \ldots x_0 \\ y \ldots y_0 \\ \ldots\ldots}} = \Omega(x_0, y_0, z_0, \ldots).$$

Эти два предложенія даютъ средство распространять теоремы Теоріи непрерывности и Теоріи предѣловъ — съ простѣйшихъ функцій на болѣе сложныя.

Замѣчаніе. Какъ указалъ впервые (въ 70-хъ годахъ XIX столѣтія) итальянскій ученый Dini, функція $f(x, y, z, \ldots)$, будучи непрерывной относительно каждаго изъ аргументовъ $x, y, z, \ldots$ *въ отдѣльности*, можетъ не быть непрерывной при *одновременномъ* ихъ измѣненіи.

17. Положимъ, что нѣкоторая функція y опредѣляется ур-ніемъ

$$y = ax + b;$$

тогда значенію $x + \Delta x$ аргумента отвѣчаетъ значеніе y_1 этой функціи, при чемъ

$$y_1 = a(x + \Delta x) + b = ax + a\Delta x + b = y + a\Delta x,$$

откуда

$$\Delta y = y_1 - y = a\Delta x.$$

Слѣдовательно, приращенія такой функціи пропорціональны приращеніямъ аргумента, и быстрота ея измѣненія вполнѣ характеризуется и опредѣляется коэффиціентомъ a, который, очевидно, равенъ отношенію $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это отношеніе наз. вообще **среднимъ приращеніемъ** *функціи y на участкѣ Δx*; для разсматриваемой **линейной** функціи $ax + b$ оно, какъ видимъ, постоянно.

Теперь положимъ, что y — *какая-нибудь* **непрерывная** функція $f(x)$, опредѣленная на участкѣ (a, A); разобьемъ послѣдній на части и обозначимъ черезъ $y_0, y_1, y_2, \ldots y_k, y_{k+1} \ldots y_n$, Y — величины функціи, соотвѣтствующія пограничнымъ значеніямъ $a, x_1, x_2, \ldots x_k, x_{k+1}, \ldots x_n, A$ аргумента. Затѣмъ введемъ въ разсмотрѣніе новую функцію, опредѣляемую условіями, что *въ пограничныхъ точкахъ ея значенія тѣ же, какъ и данной*, такъ что

$$z_0 = y_0, z_1 = y_1, \ldots z_k = y_k, z_{k+1} = y_{k+1}, \ldots z_n = y_n, Z = Y,$$

въ промежуткахъ же она измѣняется по линейнымъ законамъ, такъ что ея величины на участкѣ (x_k, x_{k+1}) опредѣляются ур-ніемъ:

$$z = z_k + \frac{z_{k+1} - z_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) = y_k + \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}(x - x_k);$$

какъ показываетъ это равенство, отношеніе $\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$, т.-е. *среднее приращеніе функціи y на участкѣ Δx_k опредѣляетъ вполнѣ быстроту измѣненія на немъ же построенной нами функціи z.*

Если теперь станемъ уменьшать всѣ Δx_k до нуля, увеличивая, слѣд., ихъ число до ∞, то въ предѣлѣ всѣ значенія x, принадлежащія участку (a, A), станутъ пограничными для его частей, а слѣд., всѣ значенія функціи z станутъ равны соотвѣтствующимъ значеніямъ данной функціи y, т.-е. *эти двѣ функціи станутъ тожественны другъ другу.* Отсюда заключаемъ, что быстрота измѣненія функціи y въ точкѣ x_k можетъ быть охарактеризована предѣломъ дроби $\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)$, если только онъ существуетъ; его наз. **производной** y **по** x.

Опредѣленіе. Производной *какой-либо непрерывной функціи наз. предѣлъ отношенія безк.-малаго ея приращенія къ соотвѣтствующему безк.-малому приращенію аргумента,*

т.-е. $$\text{Пред.}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x \ldots 0}$$

при чемъ предполагается что этотъ предѣлъ существуетъ, т.-е. представляетъ величину *конечную и опредѣленную;* впрочемъ, если $\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$ растетъ безгранично при подведеніи Δx_k къ нулю, то считаютъ, что производная существуетъ, но только равна ∞.

Если производная функціи y существуетъ для всѣхъ значеній x, принадлежащихъ участку (b, B), то совокупность всѣхъ ея величинъ образуетъ, очевидно, новую функцію x'а, опредѣленную на этомъ участкѣ; ее наз. тоже **производной отъ функціи** y и обозначаютъ такъ: $\underline{y'_x}$ или $\underline{f'(x)}$.

Замѣчаніе. Если черезъ t обозначимъ время, а черезъ s — проходимое точкой пространство, то s'_t представляетъ, какъ извѣстно, скорость этой точки въ моментъ t.

18. Теорема 1. *Производная постоянной равна нулю,*

ибо если $$y \equiv a, \text{ то и } y_1 \equiv a,$$

откуда $$\Delta y \equiv 0 \text{ и, слѣд., } \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv 0,$$

а потому и $$\text{Пред.}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x \ldots 0} = 0, \text{ т.-е. } a'_x \equiv 0.$$

Теорема 2. *Производная самого аргумента равна единицѣ,* ибо если $y \equiv x$,

то $y_1 \equiv x + \Delta x$, откуда $\Delta y \equiv \Delta x$ и, слѣд., $\frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv 1$,

а потому и $$\text{Пред.}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x \ldots 0} = 1, \text{ т.-е. } x'_x \equiv 1.$$

19. Опредѣленіе 1. *Если* α *и* β *— безк.-малыя, находящіяся въ зависимости одна отъ другой, и если Пред.* $\left(\frac{\beta}{a^n}\right)_{\alpha....0}$ *есть число* **конечное** *и* **не равное нулю,** *то говорятъ, что* **порядокъ** β **относительно** α **равенъ** n.

Очевидно, что безк.-малая тѣмъ быстрѣе идетъ къ нулю, чѣмъ выше ея порядокъ; напр.:

α^0.... 1	1	1	1
α^1....0,1	0,01	0,001	0,0001
α^2....0,01	0,0001	0,000001	0,00000001
α^3....0,001	0,000001	0,000000001	.....

Безк.-малая нулеваго порядка есть величина конечная, и обратно, ибо если

$$\text{Пред.}\left(\frac{\beta}{\alpha^0}\right) = k \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{matrix},$$

то $$\frac{\beta}{\alpha^0} = k + \varepsilon, \text{ т.-е. } \beta = k + \varepsilon;$$

и обратно — если Пред. $\beta = k \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{matrix}$, то $\beta = k + \varepsilon$, $\frac{\beta}{\alpha^0} = k + \varepsilon$

и, слѣд., $$\text{Пред.}\left(\frac{\beta}{\alpha^0}\right) = k \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{matrix}.$$

Безк.-малая отрицательнаго порядка представляетъ величину безк.-большую, ибо если

$$n > 0 \text{ и } \text{Пред.}\left(\frac{\beta}{\alpha^{-n}}\right) = k \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{matrix},$$

то $$\frac{\beta}{\alpha^{-n}} = k + \varepsilon \text{ и } \beta = \frac{k+\varepsilon}{\alpha^n}.$$

На этомъ основаніи безк.-большія величины также дѣлятъ на порядки; именно, *если*

$$\underline{\text{Пред.}\{\Omega \cdot \alpha^n\}_{\alpha....0} = k \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{matrix},}$$

то говорятъ, что Ω *есть безк.-большая n'го порядка.*

20. **Опредѣленіе 2. Эквивалентными** *безк.-малыми наз. такія, предѣлъ отношенія коихъ равенъ единицѣ.*

Опредѣленіе 3. *Если* β *— н'го порядка относительно* α *и если*

$$\text{Пред.}\left(\frac{\beta}{\alpha^n}\right)_{\alpha\ldots0} = k \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{matrix},$$

то одночлен $k\alpha^n$ *наз.* **главнымъ значеніемъ (главной частью)** *безконечно-малой* β.

Очевидно, что Пред. $\left(\frac{\beta}{k\alpha^n}\right)_{\alpha\ldots0} = 1$, т.-е. *безк.-малая величина и ея главное значеніе* **эквивалентны** *другъ другу.*

21. **Слѣдствіе.** *Если* $y'_x \neq 0$, *то главное значеніе приращенія* Δy *функціи равно произведенію* $y'_x . \Delta x$; это произведеніе называютъ **дифференціаломъ** *функціи* и обозначаютъ черезъ dy или $df(x)$, при чемъ *понятіе это распространяютъ и на случай, когда* $y'_x = 0$.

Изъ теоремы 2-й (№ 18) вытекаетъ, что

$$dx = x'_x \Delta x = 1 . \Delta x = \Delta x,$$

т.-е. *дифференціалъ аргумента равенъ его приращенію,* а слѣд., *дифференціалъ функціи есть произведеніе ея производной на дифференціалъ аргумента:*

$$dy = y'_x dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

при чемъ, *если производная функціи* $\neq 0$, *то ея дифференціалъ есть главное значеніе ея безк.-малаго приращенія.*

22. Уравненіе (4) даетъ:

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \text{ т.-е. Пред.} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x\ldots0} = \frac{dy}{dx};$$

значитъ, пользуясь понятіемъ о производной, мы, по существу,

вмѣсто самихъ значеній изучаемой функціи разсматриваемъ лишь ихъ безк.-малыя приращенія, отвѣчающія безк.-малымъ же приращеніямъ аргумента — именно, изучаемъ ихъ отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, при чемъ еще *вмѣсто самихъ приращеній подставляемъ ихъ главныя значенія*, т.-е. дифференціалы функціи и аргумента. Такимъ образомъ **методъ производныхъ** основанъ на примѣненіи **1-й основной теоремы о безк.-малыхъ:** «*предѣлъ отношенія двухъ безк.-малыхъ не измѣнится, если числитель и знаменатель замѣнимъ величинами, имъ эквивалентными*».

Это объясняетъ причину плодотворности этого метода: не умѣя иногда найти зависимость между аргументомъ и функціей, вслѣдствіе ея сложности и невозможности выбросить какой бы то ни было *конечный* членъ въ ея выраженіи, мы, разсматривая ея производную, вводимъ *безк.-малыя* приращенія, при чемъ получаемъ право пренебрегать въ извѣстныхъ случаяхъ безконечно-малыми членами высшихъ порядковъ, а потому и можемъ оказаться въ силахъ найти связь между аргументомъ и производною изучаемой функціи. Если бы и эта задача оказалась не по плечу, то ту же идею можно примѣнить къ самой этой производной, изучая въ свою очередь ея производную или **вторую производную** отъ первоначальной функціи; и т. д.

Совокупность всѣхъ методовъ изученія функціи, основанныхъ на разсмотрѣніи ея безк.-малыхъ приращеній, образуетъ содержаніе **Анализа безконечно-малыхъ** или **Трансцендентнаго Анализа**; онъ дѣлится на двѣ части: **дифференціальное исчисленіе** и **интегральное.**

Первое имѣетъ цѣлью, во-первыхъ, *научить быстро отыскивать аналитическія выраженія производныхъ отъ функцій, заданныхъ аналитически же;* а во-вторыхъ, *установить зависимость свойствъ первой, второй и т. д. производныхъ какой-либо функціи отъ свойствъ ея самой.* Интегральное же исчисленіе рѣшаетъ обратную задачу, формулируемую въ самомъ общемъ ея видѣ такъ: *зная аналитическую зависимость между аргументами, ихъ функціей и ея различными производными, изучить свойства этой функціи и опредѣлить ея значеніе, отвѣчающее любой допустимой совокупности значеній аргументовъ.*

§ 2. Понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ.

23. **Теорема Дарбу** (Darboux). Положимъ, что *функція* $f(x)$, *опредѣленная на участкѣ* (x_0, X) (гдѣ $x_0 < X$), **конечна и непрерывна** *на всемъ его протяженіи.*

Разобьемъ этотъ участокъ на части

$$\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots . \Delta_i x, \ldots . \Delta_n x,$$

такъ что $\Delta_1 x + \Delta_2 x + \ldots . + \Delta_n x = X - x_0;$

затѣмъ на каждой такой части $\Delta_i x$ найдемъ низшую и высшую границы m_i и M_i данной функціи и составимъ суммы:

$$\sigma = m_1 \Delta_1 x + m_2 \Delta_2 x + \ldots . + m_i \Delta_i x + \ldots . + m_n \Delta_n x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \Delta_i x$$

и

$$\sum = M_1 \Delta_1 x + M_2 \Delta_2 x + \ldots . + M_i \Delta_i x + \ldots . + M_n \Delta_n x = \sum_{i=1}^{i=n} M_i \Delta_i x.$$

Теорема Дарбу состоитъ въ утвержденіи, что *при умень-шеніи* **всѣхъ** *частныхъ промежутковъ* $\Delta_i x$ *до нуля* (*а, слѣд., при увеличеніи ихъ числа до* ∞) *обѣ эти суммы стремятся къ одному и тому же предѣлу* S.

Доказательство ея разобьемъ на три части.

I) *При* **дробленіи** *дѣленій* $\Delta_1 x$, $\Delta_2 x, \ldots .$ *вновь на части сумма* σ *растетъ, а сумма* Σ *убываетъ.*

Дѣйствительно, пусть

$$\Delta_1 x = \Delta'_1 x + \Delta''_1 x + \ldots ., \Delta_2 x = \Delta'_2 x + \Delta''_2 x + \ldots .,$$
$$\ldots . \Delta_n x = \Delta'_n x + \Delta''_n x + \ldots .,$$

а величины низшей и высшей границъ данной функціи на новыхъ участкахъ пусть будутъ соотвѣтственно m'_1 и M'_1, m''_1 и

$M''_1, \ldots$ m'_2 и M'_2, m''_2 и $M''_2, \ldots$; очевидно, что m_1 *есть* **наименьшее** *изъ чиселъ* m'_1, $m''_1, \ldots$; m_2 — **наименьшее** *изъ чиселъ* m'_2, $m''_2, \ldots$, и т. д.; точно такъ же M_1 *есть* **наибольшее** *изъ чиселъ* M'_1, $M''_1, \ldots$; M_2 — **наибольшее** *изъ чиселъ* M'_2, $M''_2, \ldots$; и т. д. Отсюда и заключаемъ, что

$$\sum (m'_i \Delta'_i x + m''_i \Delta''_i x + \ldots) \geqslant \sum (m_i \Delta'_i x + m_i \Delta''_i x + \ldots) =$$

$$= \sum m_i (\Delta'_i x + \Delta''_i x + \ldots),$$

а

$$\sum (M'_i \Delta'_i x + M''_i \Delta''_i x + \ldots) \leqslant \sum (M_i \Delta'_i x + M_i \Delta''_i x + \ldots) =$$

$$= \sum M_i (\Delta'_i x + \Delta''_i x + \ldots),$$

т.-е.

$$\sum (m'_i \Delta'_i x + m''_i \Delta''_i x + \ldots) \geqslant \sum m_i \Delta_i x,$$

а

$$\sum (M'_i \Delta'_i x + M''_i \Delta''_i x + \ldots) \leqslant \sum M_i \Delta_i x.$$

II) *Всякая изъ суммъ* σ *меньше любой изъ суммъ* Σ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть сумма σ' отвѣчаетъ системѣ дѣленій $\Delta'_1 x$, $\Delta'_2 x, \ldots$, а сумма Σ'' — системѣ дѣленій $\Delta''_1 x$, $\Delta''_2 x, \ldots$; введемъ новую систему дѣленій, получаемую отъ принятія во вниманіе **всѣхъ** точекъ дѣленія **обѣихъ** данныхъ системъ, и обозначимъ получаемыя при этомъ дѣленія черезъ $\Delta_1 x$, $\Delta_2 x, \ldots \Delta_n x$; такъ какъ новая система дѣленій получается, какъ изъ первой, такъ и изъ второй, *дробленіемъ ихъ частей*, то на основаніи только что доказаннаго имѣемъ:

$$\sigma' = \sum m'_k \Delta'_k x \leqslant \sum m_i \Delta_i x, \quad \Sigma'' = \sum M''_k \Delta''_k x \geqslant \sum M_i \Delta_i x;$$

но очевидно, что

$$\sum m_i \Delta_i x < \sum M_i \Delta_i x;$$

слѣд.,

$$\sigma' < \Sigma''.$$

III) Наконецъ, *разность двухъ* соотвѣтственныхъ *суммъ* Σ *и* σ *идетъ къ нулю, когда всѣ* Δx *идутъ къ нулю.* Дѣйствительно, если суммы Σ и σ — соотвѣтственны, т. е. отвѣчаютъ одной и той-же системѣ дѣленій, то

$$\sum - \sigma = \sum M_i \Delta_i x - \sum m_i \Delta_i x = \sum (M_i \Delta_i x - m_i \Delta_i x) =$$
$$= \sum (M_i - m_i) \Delta_i x.$$

Но по условію функція $f(x)$ — непрерывна и, слѣд., $M_i - m_i$ идетъ къ нулю вмѣстѣ съ $\Delta_i x$; поэтому, обозначая черезъ ω наибольшую *изъ абсолютныхъ величинъ* всѣхъ разностей $M_i - m_i$, получаемъ:

$$\text{Пред.} \left(\sum - \sigma \right)_{\Delta_i x \ldots 0} \leqslant \text{Пред.} \left(\sum \omega \Delta_i x \right)_{\Delta_i x \ldots 0} =$$
$$= \text{Пред.} \left(\omega \sum \Delta_i x \right)_{\Delta_i x \ldots 0} = \text{Пред.} \left[\omega (X - x_0) \right]_{\Delta_i x \ldots 0} = 0.$$

Изъ того, что различныя величины суммъ σ и Σ образуютъ двѣ группы чиселъ, при чемъ всякая изъ суммъ σ меньше любой изъ суммъ Σ, разность же $\Sigma - \sigma$ идетъ къ нулю при подведеніи всѣхъ Δx къ нулю, и вытекаетъ (№ 9), что обѣ эти суммы имѣютъ предѣлъ и притомъ общій.

24. Замѣчаніе. Въ предъидущемъ доказательствѣ мы считали, что функція $f(x)$ непрерывна на всемъ участкѣ (x_0, X). Допустимъ теперь, что она, *оставаясь на всемъ этомъ участкѣ* конечной, *разрывается на немъ въ* конечномъ *числѣ точекъ* $A, B, \ldots E$, при чемъ величины разрывовъ суть $a, b, \ldots e$; безк.-малые же участки Δx, заключающіе точки разрывовъ обозначимъ черезъ $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon \ldots$. Двѣ первыхъ части приведеннаго выше доказательства остаются, очевидно, въ полной силѣ и въ этомъ случаѣ, ибо въ нихъ не приходится ссылаться на непрерывность функціи $f(x)$; то же будетъ и съ третьей частью разсужденія, ибо, хотя въ числѣ слагаемыхъ вида $(M_i - m_i) \Delta_i x$, образую-

щихъ разность $\Sigma - \sigma$, кромѣ такихъ, въ которыхъ $M_i - m_i$ идетъ къ нулю вмѣстѣ съ $\Delta_i x$, будутъ еще такія, въ которыхъ $M_i - m_i$ стремится къ одному изъ чиселъ $a, b, \ldots . e$, но такъ какъ

$$\text{Пред. } (a\alpha + b\beta + \ldots . + e\varepsilon)_{\alpha, \beta, \ldots . \varepsilon \ldots . 0} = 0,$$

то всетаки $$\text{Пред. } (\Sigma - \sigma)_{\Delta_i x \ldots . 0} = 0.$$

Отсюда заключаемъ, что *Теорема Дарбу справедлива* и въ этомъ, болѣе общемъ, случаѣ, т.-е. *для функціи,* **конечной** *на всемъ участкѣ и,* **вообще говоря,** *непрерывной на немъ, если же и разрывающейся, то лишь* **конечное** *число разъ.*

25. Общая величина S предѣловъ двухъ разсмотрѣнныхъ въ № 23-мъ суммъ наз. **опредѣленнымъ интеграломъ функціи** $f(x)$, **взятымъ отъ** x_0 **до** X; функція же $f(x)$, удовлетворяющая условіямъ теоремы Дарбу, наз. **интегрируемой.**

Это понятіе объ интегралѣ выгодно нѣсколько обобщить. Именно, *если черезъ* x_i *обозначимъ* **любое** *число принадлежащее участку* $\Delta_i x$, *то*

$$\text{Пред. } \left\{\sum f(x_i)\,\Delta_i x\right\}_{\Delta_i x \ldots . 0} = S.$$

Дѣйствительно, такъ какъ $m_i \leqslant f(x_i) \leqslant M_i$,

то $$m_i \Delta_i x \leqslant f(x_i)\,\Delta_i x \leqslant M_i \Delta_i x$$

и, слѣд., $$\sum m_i \Delta_i x \leqslant \sum f(x_i)\,\Delta_i x \leqslant \sum M_i \Delta_i x;$$

переходя къ предѣлу, получаемъ:

$$S \leqslant \text{Пред.} \sum f(x_i)\,\Delta_i x \leqslant S,$$

откуда и выводимъ, что

$$\text{Пред.} \sum f(x_i)\,\Delta_i x = S.$$

Такъ какъ въ прежнее время для замѣны слова «суммы» вмѣсто буквы Σ писали S, то интегралъ функціи $f(x)$, взятый отъ x_0 до X, обозначаютъ такъ:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

при чемъ dx ставится вмѣсто Δx на томъ основаніи, что x—перемѣнная независимая и, слѣд., $dx=\Delta x$; а знакъ $\int$, называемый **знакомъ интеграла**, представляетъ видоизмѣнившуюся при скорописи букву S; произведеніе $f(x)\,dx$ наз. **подъинтегральнымъ выраженіемъ**, функція $f(x)$ — **подъинтегральной функціей**, x_0 — **нижнимъ**, а X — **верхнимъ предѣломъ** интеграла.

26. Итакъ, *если* $x_0 < X$, то **по опредѣленію:**

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \text{Пред.}\left\{\sum_{x_0}^{X} f(x_i)\,\Delta_i x\right\}_{\Delta_i x \ldots 0} \quad \ldots\ldots\ldots (5),$$

при чемъ, какъ ясно изъ всего вышеизложеннаго, этотъ предѣлъ не зависитъ ни отъ закона подведенія всѣхъ Δx къ нулю, ни отъ выбора чиселъ x_i на участкахъ $\Delta_i x$.

Если $X < x_0$, то можемъ, очевидно, примѣнить тѣ же разсужденія, при чемъ и заключенія останутся тѣ же, съ тѣмъ лишь отличіемъ, что, идя при построеніи частей $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots \Delta_n x$ *отъ* **большаго** *числа* x_0 *къ меньшему* X, мы должны въ равенствѣ (5) считать всѣ эти части **отрицательными.**

Изъ этого между прочимъ слѣдуетъ, что *отъ перестановки предѣловъ опредѣленнаго интеграла мѣняется его знакъ*, ибо если, напр., $x_0 < X$, то

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \text{Пред.}\{f(x_1)\,\Delta_1 x + f(x_2)\,\Delta_2 x + \ldots + f(x_n)\,\Delta_n x\} =$$

$$= -\text{Пред.}\{f(x_1)(-\Delta_1 x)+f(x_2)(-\Delta_2 x)+\ldots.+f(x_n)(-\Delta_n x)\}=$$

$$= -\text{Пред.}\{f(x_n)(-\Delta_n x)+f(x_{n-1})(-\Delta_{n-1} x)+\ldots.+f(x_1)(-\Delta_1 x)\}=$$

$$= -\int_X^{x_0} f(x)\,dx.$$

Слѣдствіе. Полагая въ этомъ равенствѣ $X = x_0$ получаемъ:

$$\int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx = -\int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx,$$

откуда $2\int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx = 0$ и, слѣд., $\int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx = 0,$

т.-е. *опредѣленный интегралъ, верхній и нижній предѣлы коего равны другъ другу, равенъ нулю.*

27. Находить величину $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, пользуясь равенствомъ (5), вообще говоря затруднительно, а часто и прямо невозможно, почему дальше будутъ указаны другіе способы для этого; но иногда можно примѣнить и это равенство, при чемъ выгодно считать

$$\Delta_1 x = \Delta_2 x = \ldots. = \Delta_n x = h = \frac{X - x_0}{n}.$$

Прим. 1. Найти интегралъ $I = \int_1^3 e^x\,dx.$

Полагая $h = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$ и $x_i = 1 + (i-1)h,$

имѣемъ:

$$I = \text{Пред.}\left\{e^{x_1}\Delta_1 x + e^{x_2}\Delta_2 x + e^{x_3}\Delta_3 x + \ldots. + e^{x_n}\Delta_n x\right\} =$$

$$= \text{Пред.} \left\{ e^1 h + e^{1+h} h + e^{1+2h} h + \ldots + e^{1+(n-1)h} h \right\}_{h \ldots 0} =$$

$$= \text{Пред.} \left\{ e \left[1 + e^h + e^{2h} + \ldots + e^{(n-1)h} \right] h \right\}_{h \ldots 0} =$$

$$= \text{Пред.} \left\{ e \frac{e^{(n-1)h} \cdot e^h - 1}{e^h - 1} h \right\}_{h \ldots 0} = \text{Пред.} \left\{ e \frac{e^{nh} - 1}{\left(1 + \frac{h}{1} + \frac{h^2}{1.2} e^{\theta h}\right) - 1} h \right\}_{h \ldots 0},$$

гдѣ $$0 < \theta < 1;$$

слѣд., $$\dot{I} = e \cdot \text{Пред.} \left\{ \frac{e^2 - 1}{1 + \frac{h}{2} e^{\theta h}} \right\}_{h \ldots 0} = e^3 - e.$$

Прим. 2. Найти $$\dot{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$$

Считая $$h = \frac{\pi}{2n}, \quad x_i = (i-1)h,$$

получаемъ:

$$\dot{I} = \text{Пред.} \left\{ \cos x_1 \cdot \Delta_1 x + \cos x_2 \cdot \Delta_2 x + \ldots + \cos x_n \cdot \Delta_n x \right\} =$$

$$= \text{Пред.} \left\{ \cos 0 \cdot h + \cos h \cdot h + \cos 2h \cdot h + \ldots + \cos (n-1)h \cdot h \right\}_{h \ldots 0} =$$

$$= \text{Пред.} \left\{ h \left[\cos 0 + \cos h + \cos 2h + \ldots + \cos (n-1)h \right] \right\}_{h \ldots 0} =$$

$$= \text{Пред.} \left\{ h \frac{2 \sin h \cos 0 + 2 \sin h \cos h + 2 \sin h \cos 2h + \ldots + 2 \sin h \cos (n-2)h + 2 \sin h \cos (n-1)h}{2 \sin h} \right\}_{h \ldots 0};$$

но $$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

откуда, полагая $$\frac{\alpha - \beta}{2} = h, \quad \frac{\alpha + \beta}{2} = kh,$$

и, слѣд., $$\alpha = (k+1)h, \quad \beta = (k-1)h,$$

имѣемъ: $2\sin h\cos kh = \sin(k+1)h - \sin(k-1)h$;

поэтому $\dot{I} = \frac{1}{2}\text{Пред.}\left(\frac{h}{\sin h}\{[\sin h - \sin(-h)] + [\sin 2h - \sin 0] + \right.$

$+ [\sin 3h - \sin h] + [\sin 4h - \sin 2h] + \ldots + [\sin(n-1)h +$

$\left. - \sin(n-3)h] + [\sin nh - \sin(n-1)h]\}\right)_{h\ldots0} =$

$= \frac{1}{2}\text{Пред.}\left\{\frac{h}{\sin h}[\sin h + \sin(n-1)h + \sin nh]\right\}_{h\ldots0} =$

$= \frac{1}{2}\text{Пред.}\left(\frac{h}{\sin h}\right).\text{Пред.}\left\{\sin\frac{\pi}{2n} + \sin\frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right\} = 1.$

Прим. 3. Вычислить $\dot{I} = \int_1^4 x^2\,dx.$

Беря $h = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$,

имѣемъ: $\dot{I} = \text{Пред.}\{1^2.h + (1+h)^2.h + (1+2h)^2.h + \ldots +$

$+ [1+(n-1)^2 h]\,h\}_{h\ldots0} = \text{Пред.}\{h + (1+2h+h^2)h + (1+4h+4h^2)h +$

$+ (1+6h+9h^2)h + \ldots + [1+2(n-1)h + (n-1)^2h^2]h\}_{h\ldots0} = \text{Пред.}\{nh +$

$+ 2[1+2+3+\ldots+(n-1)]h^2 + [1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2]h^3\}_{h\ldots0}$;

но, полагая $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2,$

имѣемъ: $1^3 + 2^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = 1^3 + (1+1)^3 + (1+2)^3 + \ldots +$

$+ [1+(n-1)]^3 = 1 + (1 + 3.1 + 3.1^2 + 1^3) + (1 + 3.2 + 3.2^2 + 2^3) + \ldots +$

$+ [1 + 3(n-1) + 3(n-1)^2 + (n-1)^3] = n + 3[1+2+\ldots+(n-1)] + 3[1^2+2^2+\ldots$

$+ (n-1)^2] + [1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3],$

откуда $n^3 = n + 3\frac{n(n-1)}{2} + 3S_2$

и, слѣд., $S_2 = \frac{1}{3}\left[n^3 - 3\frac{n(n-1)}{2} - n\right] = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6};$

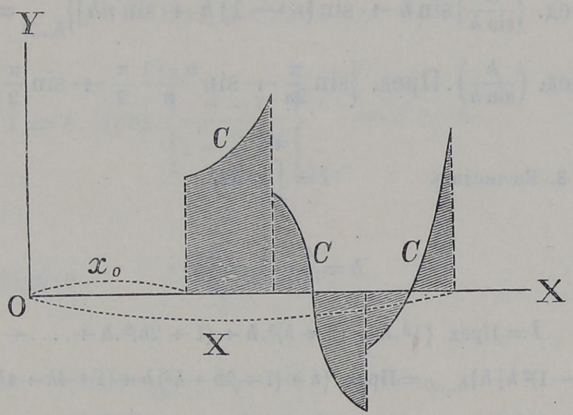
поэтому $\dot{I} = \text{Пред.}\left\{nh + n(n-1)h^2 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}h^3\right\}_{h\ldots0} =$

$= \text{Пред.}\left\{3 + 3(3-h) + \frac{3(3-h)(6-h)}{6}\right\}_{h\ldots0} = 3 + 9 + 9 = 21.$

28. Для приданія понятію объ интегралѣ большей конкретности, укажемъ здѣсь же **геометрическое значеніе опредѣленнаго интеграла.**

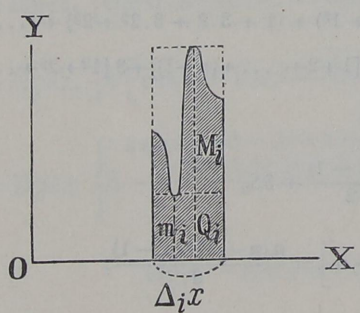
Положимъ, что мы имѣемъ функцію $f(x)$, «*интегрируемую*» на участкѣ (x_0, X), т.-е. *конечную и*, **вообще говоря**, *непрерывную;*

Черт. 8.



построимъ при Декартовыхъ координатахъ кривую C, выражаемую уравненіемъ: $y = f(x)$, и разсмотримъ площадь Q, ограниченную осью OX, этой кривою и ординатами, проведенными черезъ крайнія точки и черезъ точки разрыва функціи. Раздѣливъ участокъ (x_0, X) на части $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots \Delta_n x$, проведемъ ординаты черезъ точки дѣленій; тогда площадь Q тоже раздѣлится на части $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$, при чемъ, очевидно (черт. 9),

Черт. 9.



$$m_i \Delta_i x \leqslant Q_i \leqslant M_i \Delta_i x,$$

гдѣ m_i и M_i суть наименьшее и наибольшее значенія функціи

$f(x)$, т.-е. ординаты кривой, на элементѣ $\Delta_i x$; отсюда слѣдуетъ, что

$$\sum_{x_0}^{X} m_i \Delta_i x \leqslant \sum Q_i \leqslant \sum_{x_0}^{X} M_i \Delta_i x,$$

т.-е. $$\sum m_i \Delta_i x \leqslant Q \leqslant \sum M_i \Delta_i x,$$

а переходъ къ предѣлу при $\Delta_i x \ldots . 0$ даетъ:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \leqslant Q \leqslant \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

откуда заключаемъ, что $Q = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$

Такимъ образомъ, *опредѣленный интегралъ функціи* $f(x)$, *взятый на участкѣ отъ* x_0 *до* X, *выражаетъ площадь, ограниченную осью* OX, *кривою*

$$y = f(x)$$

и ординатами, проведенными черезъ крайнія точки участка и черезъ точки разрыва на немъ кривой; при этомъ, такъ какъ для точекъ надъ осью OX ордината $f(x) > 0$, а для точекъ подъ этой осью она < 0, то, значитъ, *площадки* **надъ** *осью* OX *должно считать* **положительными**, *а* **подъ** *ней* — **отрицательными.**

29. Перейдемъ теперь къ выясненію связи между понятіями объ интегралѣ и о дифференціалѣ.

Теорема 1. *Если участокъ* (x_0, X) *есть алгебрическая сумма участковъ* (x_0, a_1), (a_1, a_2), $\ldots .(a_n, X)$, *и на каждомъ изъ послѣднихъ функція* $f(x)$ *интегрируема, то*

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots . + \int_{a_n}^{X} f(x)\,dx \ldots . (6).$$

Дѣйствительно, дѣля полный участокъ на части Δx, мы можемъ точки дѣленія брать всегда такъ, чтобы *числа* $x_0, a_1, a_2, \ldots a_n, X$ *каждый разъ были пограничными;* но тогда имѣемъ:

$$\sum_{x_0}^{X} f(x_k)\Delta_k x = \sum_{x_0}^{a_1} f(x_k)\Delta_k x + \sum_{a_1}^{a_2} f(x_k)\Delta_k x + \ldots + \sum_{a_n}^{X} f(x_k)\Delta_k x;$$

переходя къ предѣлу при $\Delta_k x \ldots . 0$, и получимъ доказываемое равенство.

3О. Теорема 2 или, такъ наз., **„Теорема о среднихъ“.** *Если* m *и* M *суть наименьшее и наибольшее значенія* **функціи** $f(x)$ *на участкѣ* (x_0, X), *то* $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ *заключается между*

$$\underline{m(X - x_0) \text{ и } M(X - x_0).}$$

Дѣйствительно, такъ какъ $m \leqslant f(x_k) \leqslant M$, то $f(x_k)\Delta_k x$ заключается между $m\Delta_k x$ и $M\Delta_k x$;

слѣд., $\sum_{x_0}^{X} f(x_k)\Delta_k x$ заключается между $\sum_{x_0}^{X} m\Delta_k x$ и $\sum_{x_0}^{X} M\Delta_k x$,

т.-е. между $m\sum_{x_0}^{X}\Delta_k x$ и $M\sum_{x_0}^{X}\Delta_k x$

или, иначе, между $m(X - x_0)$ и $M(X - x_0)$;

а, значитъ, и Пред. $\sum_{x_0}^{X} f(x_k)\Delta_k x$, т.-е. $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$

заключается между этими же границами.

Обозначая черезъ $\overline{(m, M)}$ *нѣкоторое среднее между* m *и* M, можемъ написать, очевидно,

что $$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (\overline{m, M})(X - x_0) \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Слѣдствіе 1. Если функція $f(x)$ на всемъ участкѣ (x_0, X) непрерывна, то (№ 14) она проходитъ на немъ черезъ всѣ значенія, промежуточныя между m и M, такъ что $(\overline{m, M}) = f(x_{средн.})$,

а слѣд., $$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = f(x_{средн.})\,(X - x_0) \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Слѣдствіе 2. Если мы предположимъ, что

$$\Delta_1 x = \Delta_2 x = \ldots = \Delta_n x = \frac{X - x_0}{n},$$

то изъ равенства (7) получимъ: Пред. $\left\{\sum f(x_k)\frac{X - x_0}{n}\right\} = (\overline{m, M})(X - x_0)$,

откуда $$(\overline{m, M}) = \text{Пред.}\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n},$$

гдѣ $x_1, x_2, \ldots x_n$ — числа, произвольно выбираемыя по одному на каждомъ изъ равныхъ участковъ $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots, \Delta_n x$; такимъ образомъ, *число* $(\overline{m, M})$ *есть предѣлъ средняго ариѳметическаго изъ всѣхъ значеній функціи* $f(x)$, *отвѣчающихъ этимъ* x*'амъ.*

31. Теорема 3. *Интегралъ* $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$

есть непрерывная функція своего верхняго предѣла X.

Дѣйствительно, такъ какъ $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ мѣняется, конечно, при измѣненіи X, то онъ представляетъ нѣкоторую функцію числа X.

Полагая поэтому $$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(x),$$

по теоремѣ I имѣемъ:

$$F(X+\Delta X)=\int_{x_0}^{X+\Delta X} f(x)\,dx=\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx+\int_{X}^{X+\Delta X} f(x)\,dx=F(X)+\int_{X}^{X+\Delta X} f(x)\,dx,$$

или, по «теоремѣ о среднихъ»:

$$F(X+\Delta X)=F(X)+\overline{(m,M)}\,\Delta X,$$

гдѣ m и M — наименьшее и наибольшее значенія функціи $f(x)$ на участкѣ ΔX; отсюда

$$\Delta F(X)=F(X+\Delta X)-F(X)=\overline{(m,M)}\,\Delta X;$$

и такъ какъ по условію функція $f(x)$ конечна, такъ что числа m и M, а, значитъ, и среднее $\overline{(m,M)}$ между ними тоже конечны, то произведеніе $\overline{(m,M)}\,\Delta X$ или $\Delta F(X)$ — безконечно-мало, т.-е. функція $F(x)$ непрерывна около $x=X$.

32. Теорема 4. *Если подъинтегральная функція $f(x)$ непрерывна около x'а, равнаго верхнему предѣлу X интеграла, то интегралъ имѣетъ производную по этому верхнему предѣлу, и она равна* **значенію подъинтегральной функціи, вычисленному для x'а, равнаго этому предѣлу.**

Въ самомъ дѣлѣ, если функція $f(x)$ непрерывна около $x=X$, то можемъ взять приращеніе ΔX настолько малымъ, чтобы $f(x)$ была непрерывна на всемъ его протяженіи; тогда равенство

$$F(X+\Delta X)=F(X)+\int_{X}^{X+\Delta X} f(x)\,dx$$

можемъ переписать такъ:

$$F(X+\Delta X)-F(X)=f(X+\theta\,.\,\Delta X)\,\Delta X,$$

гдѣ θ — правильная положительная дробь; отсюда

$\Delta F(X) = f(X + \theta . \Delta X)\,\Delta X$ и, слѣд., $\frac{\Delta F(x)}{\Delta X} = f(X + \theta . \Delta X)$,

а потому Пред. $\left(\frac{\Delta F(X)}{\Delta X}\right)_{\Delta X \ldots 0} = f(X)$, т.-е. $F'(X) = f(X)$.

Слѣдствіе 1. При тѣхъ же условіяхъ относительно $f(x)$ имѣемъ:

$$d\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F'(X)\,dX = f(X)\,dX.$$

Слѣдствіе 2. Такъ какъ

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = -\int_{X}^{x_0} f(x)\,dx,$$

то, очевидно, *опредѣленный интегралъ есть* **непрерывная** *функція своего нижняго предѣла, при чемъ, если подынтегральная функція непрерывна около x'a, равнаго этому нижнему предѣлу, то интегралъ имѣетъ по послѣднему производную, и она равна* **взятому съ обратнымъ знакомъ** *значенію подынтегральной функціи, вычисленному для x'a, равнаго нижнему предѣлу:*

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = -f(x_0).$$

33. Предыдущая теорема показываетъ, что *опредѣленный интегралъ функціи есть одна изъ ея первообразныхъ.*

Изъ нея же еще слѣдуетъ, что *всякая «интегрируемая» функція имѣетъ первообразную.*

Глава II.

Свойства и вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ.

§ 1. Основныя свойства опредѣленныхъ интеграловъ.

34. Такъ какъ общіе способы нахожденія суммы членовъ безконечнаго ряда неизвѣстны, то нахожденіе величины опредѣленнаго интеграла, какъ предѣла суммы, возможно лишь въ исключительныхъ случаяхъ; обыкновенно же приходится для этой цѣли пользоваться другими методами; изъ нихъ простѣйшій основанъ на *предварительномъ отысканіи первообразной функціи* и примѣненіи слѣдующей теоремы.

Теорема. *Опредѣленный интегралъ равенъ разности значеній* **одной и той же непрерывной** *первообразной, вычисленныхъ для верхняго и для нижняго предѣловъ интеграла.*

Дѣйствительно, пусть $F(x)$ есть *непрерывная* первообразная для $f(x)$, такъ что

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C;$$

тогда на основаніи № 33-го имѣемъ, что

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) + C_1,$$

откуда, подводя X къ x_0 и помня, что $F(x)$ непрерывна, такъ что

$$\text{Пред.}\Big[F(X)\Big]_{X....x_0} = F(x_0),$$

получаемъ: $\int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx = F(x_0) + C_1$, т.-е. $F(x_0) + C_1 = 0$

и, слѣд., $$C_1 = -F(x_0),$$

а потому $$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Для сокращенія письма мы, чтобы показать, что надо взять разность значеній функціи $\varphi(x)$ при $x = b$ и при $x = a$, будемъ писать

$$\Big|_a^b \varphi(x);$$

тогда предъидущее равенство перепишется такъ:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \Big|_{x_0}^{X} F(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Прим. 1. $$\int_1^3 e^x\,dx = \Big|_1^3 e^x = e^3 - e.$$

Прим. 2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Прим. 3. $$\int_1^4 x^2\,dx = \Big|_1^4 \frac{x^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21.$$

35. **Замѣчаніе.** Если первообразная функція разрывается на участкѣ (x_0, X) — напр., въ точкахъ $x_1, x_2, \ldots . x_m$, то прежде примѣненія предыдущей теоремы надо разбить этотъ участокъ точками разрыва на части и примѣнить теорему объ интегралѣ на суммѣ участковъ:

$$\int_{x_0}^{X} = \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \ldots . + \int_{x_m}^{X};$$

иначе получимъ абсурдъ.

Прим. Найти $\int_{-1}^{+1} -\frac{dx}{x^2+1}$.

Такъ какъ $\int -\frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{Arccotg} x$ и эта функція разрывается при $x = 0$, при чемъ

$$\operatorname{Arccotg}(-0) = -\frac{\pi}{2}, \text{ а } \operatorname{Arccotg}(+0) = \frac{\pi}{2},$$

то $\int_{-1}^{+1} -\frac{dx}{x^2+1} = \int_{-1}^{-0} -\frac{dx}{x^2+1} + \int_{0}^{1} -\frac{dx}{x^2+1} = \Big|_{-1}^{-0} \operatorname{Arccotg} x + \Big|_{0}^{1} \operatorname{Arccotg} x =$

$$= \left[-\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] + \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right] = -\frac{\pi}{2}.$$

Повѣрка:

$$\int_{-1}^{+1} -\frac{dx}{x^2+1} = -\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2+1} = -[\operatorname{Arctg} 1 - \operatorname{Arctg}(-1)] =$$

$$= -\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = -\frac{\pi}{2}.$$

Если же бы примѣнили теорему № 34-го сразу ко всему участку, то получили-бы, что

$$\int_{-1}^{+1} -\frac{dx}{x^2+1} = \Big|_{-1}^{+1} \operatorname{Arccotg} x = \operatorname{Arccotg} 1 - \operatorname{Arccotg}(-1) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2},$$

что навѣрно ошибочно, ибо $-\frac{1}{x^2+1} < 0,$

а слѣд., и $$\int_{-1}^{+1} -\frac{dx}{x^2+1} < 0.$$

36. Какъ указывалось въ I-ой части курса, нахожденіе первообразной функціи въ явномъ видѣ часто невозможно — въ большинствѣ случаевъ неопредѣленный интегралъ представляетъ нѣкоторую новую функцію; поэтому и вычисленіе опредѣленнаго интеграла помощью предварительнаго отысканія первообразной функціи часто окажется невыполнимымъ, такъ что для подобнаго вычисленія нужно искать другихъ способовъ; они основаны на различныхъ свойствахъ опредѣленныхъ интеграловъ, къ изученію которыхъ и перейдемъ, замѣтивъ мимоходомъ, что, очевидно, *величина опредѣленнаго интеграла не зависитъ отъ того, какой буквой обозначена перемѣнная, по коей интегрируемъ*, такъ что

$$\int_a^b f(x)\,dx \equiv \int_a^b f(z)\,dz.$$

37. **Теорема 1.** *При интегрированіи можно постоянный множитель выносить изъ-подъ знака интеграла.*

Дѣйствительно, $$\int_{x_0}^{X} Af(x)\,dx = \text{Пред.}\left\{\sum_{x_0}^{X} Af(x_i)\,\Delta_i x\right\}_{\Delta_i x \ldots 0} =$$

$$= \text{Пред.}\left\{A\sum_{x_0}^{X} f(x_i)\,\Delta_i x\right\}_{\Delta_i x \ldots 0} =$$

$$= A\,\text{Пред.}\left\{\sum_{x_0}^{X} f(x_i)\,\Delta_i x\right\}_{\Delta_i x \ldots 0} = A\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

38. Теорема 2. *Интегралъ алгебрической суммы интегрируемыхъ функцій равенъ такой же суммѣ ихъ интеграловъ.*

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\int_{x_0}^{X}[f(x)+\varphi(x)-\psi(x)]\,dx = \text{Пред.}\left\{\sum_{x_0}^{X}[f(x_i)+\varphi(x_i)+\right.$$

$$\left.-\psi(x_i)]\,\Delta_i x\right\}_{\Delta_i x\ldots 0} = \text{Пред.}\left\{\sum_{x_0}^{X} f(x_i)\,\Delta_i x+\sum_{x_0}^{X}\varphi(x_i)\,\Delta_i x+\right.$$

$$\left.-\sum_{x_0}^{X}\psi(x_i)\,\Delta_i x\right\}_{\Delta_i x\ldots 0} = \text{Пред.}\left[\sum_{x_0}^{X} f(x_i)\,\Delta_i x\right]_{\Delta_i x\ldots 0}+$$

$$+\text{Пред.}\left[\sum_{x_0}^{X}\varphi(x_i)\,\Delta_i x\right]_{\Delta_i x\ldots 0}-\text{Пред.}\left[\sum_{x_0}^{X}\psi(x_i)\,\Delta_i x\right]_{\Delta_i x\ldots 0} =$$

$$=\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx+\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx-\int_{x_0}^{X}\psi(x)\,dx.$$

39. Теорема 3. *При вычисленіи* $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$

можно измѣнять перемѣнную, полагая $x=\omega(y)$, *если: 1) производная* $\omega'(y)$ *функціи* $\omega(y)$ *интегрируема на всемъ участкѣ интегрированія* и **сохраняетъ на немъ одинъ и тотъ же знакъ;** и 2) при измѣненіи x отъ x_0 до X новый *аргументъ* y *мѣняется на* **одномъ сплошномъ** *участкѣ* («*d'un seul tenant*») (y_0, Y); при этомъ его предѣлы y_0, Y опредѣлимъ изъ ур-ній

$$\underline{x_0=\omega(y_0),\quad X=\omega(Y).}$$

Дѣйствительно, такъ какъ

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \text{Пред.}\left\{\sum_{x_0}^{X} f(x_i)\,\Delta_i x\right\}_{\Delta_i x\ldots 0},$$

при чемъ всѣ Δx имѣютъ *одинъ и тотъ же знакъ*, а между тѣмъ, полагая $x = \omega(y)$, имѣемъ, что

$$\Delta x = [\omega'(y) + \varepsilon]\,\Delta y,$$

гдѣ ε идетъ къ нулю вмѣстѣ съ Δy, то ясно, что для возможности указанной замѣны перемѣнной, функція $\omega'(y)$ должна сохранять свой знакъ на всемъ участкѣ интегрированія. Съ другой стороны, если это условіе соблюдено и кромѣ того функція $\omega'(y)$ интегрируема, а y, при измѣненіи x отъ x_0 до X, мѣняется *сплошнымъ образомъ* между y_0 и Y, то

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \text{Пред.}\left\{\sum_{x_0}^{X} f(x_i)\,\Delta_i x\right\}_{\Delta_i x \ldots 0} =$$

$$= \text{Пред.}\left\{\sum_{y_0}^{Y} f[\varphi(y_i)]\,.\,[\varphi'(y_i) + \varepsilon_i]\,\Delta_i y\right\}_{\Delta_i y \ldots 0} =$$

$$= \text{Пред.}\left\{\sum_{y_0}^{Y} f[\varphi(y_i)]\,\varphi'(y_i)\,\Delta_i y\right\}_{\Delta_i y \ldots 0},$$

ибо безк.-малыя $[\varphi'(y_i) + \varepsilon_i]\,\Delta_i y$ и $\varphi'(y_i)\,\Delta_i y$

эквивалентны другъ другу; и такъ какъ

$$\text{Пред.}\left\{\sum_{y_0}^{Y} f[\varphi(y_i)]\,\varphi'(y_i)\,\Delta_i y\right\}_{\Delta_i y \ldots 0} = \int_{y_0}^{Y} f[\varphi(y)]\,\varphi'(y)\,dy,$$

то, слѣд.,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{y_0}^{Y} f[\varphi(y)]\,\varphi'(y)\,dy.$$

Прим. Для нахожденія $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x + \sin x + 1}$

полагаемъ $$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=y,$$

откуда $$\sin x=\frac{2y}{1+y^2},\ \cos x=\frac{1-y^2}{1+y^2},\ dx=\frac{2dy}{1+y^2};$$

тогда, такъ какъ x'_y, равная $\frac{2}{1+y^2}$, удовлетворяетъ условіямъ теоремы, а y, при измѣненіи x'а отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, мѣняется *сплошнымъ образомъ* отъ 0 до 1, то

$$I=\int_0^1\frac{dy}{y+1}=\Big|_0^1 l(y+1)=l2.$$

40. **Замѣчаніе.** *Если функція* $\omega'(y)$, *т.-е.* x'_y, будучи все время интегрируемой, *мѣняетъ знакъ на участкѣ интегрированія*, напр., при $x=x_1$, $x=x_2$,.... то прежде замѣны x черезъ $\omega(y)$ надо разбить участокъ (x_0, X) на части: $(x_0, x_1), (x_1, x_2)$, и т. д. и уже затѣмъ къ каждому изъ соотвѣтствующихъ интеграловъ

$$\int_{x_0}^{x_1},\ \int_{x_1}^{x_2},\ \ldots.$$

примѣнить только что изложенную теорему; подобнымъ же образомъ надо поступить, если участокъ интегрированія по y оказывается состоящимъ изъ нѣсколькихъ частей; если же эту предосторожность пропустить, то можетъ получиться абсурдъ.

Прим. 1. Непосредственно находимъ, что

$$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\sec^2 x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos^2 x}=\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{\sqrt{3}};$$

если же положимъ $$\sec x=y$$

и, слѣд., $$y_0=\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2,\ Y=\sec\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

то получимъ интегралъ $I_1 = \int_2^{\frac{2}{\sqrt{3}}} y^2 \, d \operatorname{Arcsec} y,$

при чемъ $I_1 = \int_2^{\frac{2}{\sqrt{3}}} y^2 \frac{dy}{\sqrt{y^2(y^2-1)}} = \int_2^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-1}} = \Big|_2^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \sqrt{y^2-1} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \neq I.$

Различіе результатовъ объясняется тѣмъ, что x'_y при измѣненіи x'а на участкѣ $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$, мѣняетъ знакъ, ибо

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\sec x \operatorname{tg} x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x}.$$

Для полученія вѣрнаго результата и при замѣнѣ перемѣнной, надо было поступить такъ:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}^{-0} \sec^2 x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^2 x\,dx = \int_2^0 y^2 \, d(-\operatorname{Arcsec} y) + \int_0^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}} y^2 \, d \operatorname{Arcsec} y =$$

$$= \int_0^2 \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-1}} + \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-1}} = \Big|_0^2 \sqrt{y^2-1} + \Big|_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \sqrt{y^2-1} = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Прим. 2. Полагая $x = \frac{1}{y}$, получаемъ

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = -\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{y^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} = -\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{y^2+1} = -\Big|_{-1}^{+1} \operatorname{Arctg} y = -\frac{\pi}{2},$$

въ дѣйствительности же $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = \Big|_{-1}^{+1} \operatorname{Arctg} x = \frac{\pi}{2} > 0;$

абсурдъ получился потому, что хотя x'_y, равная $-\frac{1}{y^2}$ или $-x^2$, непрерывна и отрицательна при всякомъ x'ѣ на участкѣ $(-1, +1)$, но зато, когда x мѣняется отъ -1 до 1, то проходитъ

черезъ ∓ 0, вслѣдствіе чего y мѣняется при этомъ не между -1 и $+1$, а отъ -1 до $-\infty$ и отъ $+1$ до ∞, такъ что для полученія правильнаго результата надо было вести вычисленіе такъ:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-1}^{-0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{+0}^{+1}\frac{dx}{1+x^2}=-\int_{-1}^{-\infty}\frac{dy}{y^2+1}-\int_{\infty}^{1}\frac{dy}{1+y^2}=$$

$$=-\Big|\operatorname{Arctg} y\Big|_{-1}^{-\infty}-\Big|\operatorname{Arctg} y\Big|_{\infty}^{1}=-\left[-\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]+$$

$$-\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

41. **Теорема 4.** *Если функція* $f(x)$ — **четная,** *такъ что*

$$f(-x)\equiv f(x),$$

то

$$\int_{-a}^{+a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx,$$

а если функція $f(x)$ — **нечетная,** такъ что $f(-x)\equiv -f(x)$,

то

$$\int_{-a}^{+a}f(x)\,dx\equiv 0.$$

Дѣйствительно, на основаніи № 29-го имѣемъ:

$$\int_{-a}^{+a}f(x)\,dx=\int_{-a}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{a}f(x)\,dx=-\int_{0}^{-a}f(x)\,dx+\int_{0}^{a}f(x)\,dx;$$

полагая же въ первомъ изъ двухъ послѣднихъ интеграловъ $x=-y$, а затѣмъ замѣняя въ немъ *буквy* y снова *буквой* x, получаемъ:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-y)\,dy + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]\,dx;$$

отсюда и выводимъ желаемое заключеніе, ибо въ первомъ случаѣ

$$f(-x) + f(x) \equiv 2f(x),$$

а во второмъ $f(-x) + f(x) \equiv 0.$

Если функція $f(x)$ *ни четная, ни нечетная*, то, какъ извѣстно, она есть сумма двухъ другихъ: напр., $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, изъ коихъ первая — четная, а вторая — нечетная *); поэтому въ такомъ случаѣ

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{+a} [\varphi(x) + \psi(x)]\,dx = \int_{-a}^{+a} \varphi(x)\,dx + \int_{-a}^{+a} \psi(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} \varphi(x)\,dx.$$

42. **Теорема 5.** *Если произведеніе pq представляетъ функцію, непрерывную на участкѣ* (x_0, X), *то*

$$\int_{x_0}^{X} p\,dq = \Big|_{x_0}^{X} pq - \int_{x_0}^{X} q\,dp,$$

ибо тогда

$$\int_{x_0}^{X} p\,dq + \int_{x_0}^{X} q\,dp = \int_{x_0}^{X} (p\,dq + q\,dp) = \int_{x_0}^{X} d(pq) = \Big|_{x_0}^{X} pq.$$

*) Дѣйствительно, $f(x) \equiv \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, а изъ этихъ слагаемыхъ первое представляетъ, очевидно, четную функцію, а второе—нечетную.

Прим. Считая $n > 1$, получаемъ:

$$\dot{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \, d \sin x = \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^{n-1} x +$$

$$+ (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx =$$

$$= (n-1) \dot{I}_{n-2} - (n-1) \dot{I}_n;$$

переносъ послѣдняго члена въ правую часть даетъ:

$$n \dot{I}_n = (n-1) \dot{I}_{n-2} \quad \text{и, слѣд.,} \quad \dot{I}_n = \frac{n-1}{n} \dot{I}_{n-2}.$$

Примѣняя это равенство послѣдовательно, находимъ, что

$$\dot{I}_n = \frac{n-1}{n} \dot{I}_{n-2} = \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)} \dot{I}_{n-4} = \ldots = \frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2m+1)}{n(n-2)\ldots(n-2m+2)} \dot{I}_{n-2m};$$

и такъ какъ $\dot{I}_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$, а $\dot{I}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$,

то $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} x dx = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots.5.3.1}{2k(2k-2)\ldots.6.4.2} \frac{\pi}{2}$$

и $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} dx = \frac{2k(2k-2)\ldots.4.2}{(2k+1)(2k-1)\ldots.5.3}.$$

Точно такъ же нашли бы, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots.5.3.1}{2k(2k-2)\ldots.6.4.2}\,\frac{\pi}{2}$$

и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx = \frac{2k(2k-2)\ldots.4.2}{(2k+1)(2k-1)\ldots.5.3}.$$

43. Теорема 6. *Если функція* $f(x)$ *на участкѣ* (x_0, X) *все время положительна, то* $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ *имѣетъ тотъ же знакъ, что и разность* $X - x_0$; *а если* $f(x)$ *все время здѣсь отрицательна, то знакъ этого интеграла обратенъ знаку разности* $(X - x_0)$.

Дѣйствительно, по «теоремѣ о среднихъ» (№ 30) имѣемъ, что

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = [f(x)]_{ср.}(X - x_0);$$

но если $f(x)$ всегда > 0, то и $[f(x)]_{ср.} > 0$;

если же $f(x)$ всегда < 0, то и $[f(x)]_{ср.} < 0$;

отсюда и получаемъ желаемое заключеніе.

44. Слѣдствіе. *Если* $f(x) \geqslant \varphi(x)$ *на* всемъ *участкѣ* (x_0, X),

то

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \geqslant \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx \quad \text{при} \quad x_0 < X$$

и

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \leqslant \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx \quad \text{при} \quad x_0 > X,$$

ибо $$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} [f(x) - \varphi(x)]\,dx$$

и, по условію, все время $f(x) - \varphi(x) \geqslant 0$.

45. **Приложеніе — Формула Валлиса** (Wallis).

На участкѣ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ все время $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$,

и, слѣд., $$\sin^{2k-1} x \geqslant \sin^{2k} x \geqslant \sin^{2k+1} x,$$

а потому $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1} x\,dx \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx,$$

т.-е. (см. № 42):

$$\frac{2.4.6....(2k-2)}{3.5.7....(2k-1)} \geqslant \frac{1.3.5....(2k-3)(2k-1)}{2.4.6....(2k-2)2k}\,\frac{\pi}{2} \geqslant \frac{2.4.6....(2k-2)2k}{3.5.7....(2k-1)(2k+1)},$$

откуда, дѣля все на коэффиціентъ при $\frac{\pi}{2}$ въ средней части, получаемъ:

$$\frac{[2.4.6.....(2k-2)]^2.2k}{1.[3.5.7....(2k-1)]^2} \geqslant \frac{\pi}{2} \geqslant \frac{[2.4.6....(2k-2)2k]^2}{1.[3.5.7....(2k-1)]^2(2k+1)}.$$

Но, полагая

$$A_k = \frac{[2.4.6....(2k-2)]^2\,2k}{1.[3.5.7....(2k-1)]^2} \text{ и } B_k = \frac{[2.4.6....(2k-2)2k]^2}{1.[3.5.7....(2k-1)]^2(2k+1)},$$

имѣемъ: $\text{Пред.}\left(\frac{A_k}{B_k}\right)_{k....\infty} = \text{Пред.}\left(\frac{2k+1}{2k}\right)_{k....\infty} = \text{Пред.}\left(1+\frac{1}{2k}\right)_{k....\infty} = 1;$

слѣд., тѣмъ болѣе $\text{Пред.}\left(\frac{A_k}{\frac{\pi}{2}}\right)_{k....\infty} = 1$ и $\text{Пред.}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{B_k}\right)_{k....\infty} = 1,$

т.-е. $$\frac{\pi}{2} = \text{Пред.}\left\{\frac{[2.4.6....(2k-2)]^2\,2k}{1.[3.5.7....(2k-1)]^2}\right\}_{k....\infty} =$$

$$= \text{Пред.}\left\{\frac{[2.4.6....(2k)]^2}{1.[3.5.7....(2k-1)]^2(2k+1)}\right\}_{k....\infty}$$

или $$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\cdot\ldots$$

Это выраженіе числа $\frac{\pi}{2}$ подъ видомъ *безконечнаго произведенія* дано впервые англійскимъ математикомъ Валлисомъ (Wallis, 1616—1703), почему и наз. «**формулой Валлиса**».

Изъ него получаемъ:

$$\frac{\pi}{4}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdots.$$

или

$$\frac{\pi}{4}=\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)\cdots,$$

откуда

$$l\frac{\pi}{4}=l\left(1-\frac{1}{9}\right)+l\left(1-\frac{1}{25}\right)+l\left(1-\frac{1}{49}\right)\cdots$$

или, на основаніи разложенія $l(1+x)$ въ рядъ по степенямъ числа x:

$$l\frac{\pi}{4}=-\left\{\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^3}+\cdots\right]+\right.$$
$$+\left[\frac{1}{25}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{25^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{25^3}+\cdots\right]+$$
$$+\left[\frac{1}{49}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{49^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{49^3}+\cdots\right]+$$
$$\left.+\cdots\cdots\cdots\cdots\right\};$$

и такъ какъ стоящій во второй части рядъ — *абсолютно сходящійся*, то можемъ переставить его члены, при чемъ получимъ:

$$l\frac{\pi}{4}=-\left\{\left[\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\cdots\right]+\cdots\right\}.$$

Такимъ образомъ можемъ вычислить $l\frac{\pi}{4}$ съ произвольной степенью точности.

46. Теорема 7. *Если подъ знакомъ интеграла стоитъ произведеніе двухъ функцій, изъ которыхъ одна* **знакопостоянна**, *то* **другую** *можно вынести изъ подъ интеграла нѣкоторымъ* **среднимъ** *ея значеніемъ;* напр., если $f(x)$ — знакопостоянна на участкѣ (x_0, X), а наименьшее и наибольшее значенія $\varphi(x)$ на этомъ

участкѣ суть m и M, то

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\varphi(x)\,dx = (\overline{m, M})\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

Дѣйствительно, на основаніи № 44-го имѣемъ, что интегралъ $\int_{x_0}^{X} f(x)\varphi(x)\,dx$ заключается между $\int_{x_0}^{X} f(x)\,m\,dx$ и $\int_{x_0}^{X} f(x)\,M\,dx$,

т.-е. между $m\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ и $M\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$,

а слѣд., $$\int_{x_0}^{X} f(x)\varphi(x)\,dx = (\overline{m, M})\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

Слѣдствіе. Если выносимая изъ-подъ знака интеграла функція непрерывна на участкѣ (x_0, X), то она проходитъ на немъ черезъ всѣ значенія, промежуточныя между m и M, а потому въ этомъ случаѣ

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(x_{\text{сред.}})\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

§ 2. Вычисленіе интеграловъ помощью рядовъ.

47. Теорема 8. *Если функція $f(x)$ на всемъ участкѣ (x_0, X) разлагается въ сходящійся рядъ*

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots\ldots\ldots (11),$$

т.-е. если $$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + R_n \ldots (12),$$

при чемъ $$\text{Пред.}\,(R_n)_{n=\infty} = 0$$

при **всякомъ** *x на этомъ участкѣ, и если всѣ функціи $f_1(x)$, $f_2(x)$.... непрерывны на всемъ же участкѣ, то интегралъ суммы ряда получается помощью* **почленнаго интегрированія этого ряда**, т.-е.

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} f_1(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} f_2(x)\,dx + \ldots + \int_{x_0}^{X} f_n(x)\,dx + \ldots .$$

Дѣйствительно, интегрируя равенство (12) почленно, какъ состоящее изъ *конечнаго* числа слагаемыхъ, получаемъ:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} f_1(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} f_2(x)\,dx + \ldots + \int_{x_0}^{X} f_n(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} R_n\,dx;$$

но по «теоремѣ о среднихъ»: $\int_{x_0}^{X} R_n\,dx = (R_n)_{cp.}(X - x_0)$,

гдѣ $(R_n)_{cp.}$ есть нѣкоторое среднее изъ значеній R_n на участкѣ (x_0, X), почему Пред. $[(R_n)_{cp.}]_{n=\infty} = 0$;

значитъ, и $$\text{Пред.} \left\{\int_{x_0}^{X} R_n\,dx\right\}_{n=\infty} = 0,$$

а слѣд.,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} f_1(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} f_2(x)\,dx + \ldots + \int_{x_0}^{X} f_n(x)\,dx + \ldots .$$

Прим. Найти интегралъ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ при $k < 1$.

Такъ какъ $\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi +$

$$+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}k^4\sin^4\varphi-\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{1.2.3}k^6\sin^6\varphi+\ldots.=$$

$$=1+\frac{1}{2}\frac{k^2}{1}\sin^2\varphi+\frac{1.3}{2^2}\frac{k^4}{1.2}\sin^4\varphi+\frac{1.3.5}{2^3}\cdot\frac{k^6}{1.2.3}\sin^6\varphi+\ldots.,$$

при чемъ это разложеніе существуетъ при всякомъ φ, то

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi+\frac{1}{2}k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi+\frac{1.3}{2.4}k^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi d\varphi+\frac{1.3.5}{2.4.6}k^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi d\varphi+\ldots.;$$

но на основаніи № 42 имѣемъ: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}\varphi d\varphi=\frac{1.3.5\ldots.(2m-1)}{2.4.6\ldots.2m}\frac{\pi}{2}$;

слѣд., $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}k\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}k^2\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}k^3\right)^2+\ldots.\right\}$.

48. **Слѣдствіе 1.** *Если функція $f(x)$ на участкѣ (x_0, X) разлагается по положительнымъ и возрастающимъ степенямъ x'а въ безконечный рядъ, сходящійся при* **всякомъ** *x на этомъ участкѣ, то и $\int_0^x f(x)\,dx$ разлагается въ подобный же рядъ, получаемый притомъ* **почленнымъ интегрированіемъ** *перваго ряда.*

Прим. $\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}dx=\int_0^1\left\{1-\frac{\sqrt{x}}{1}+\frac{(\sqrt{x})^2}{1.2}-\frac{(\sqrt{x})^3}{1.2.3}+\ldots.\right\}dx=$

$$=\int_0^1\left\{x-\frac{1}{1}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\ldots.\right\}=1-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!}+$$

$$-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3!}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4!}+-\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5!}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6!}-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{7!}+\ldots.=1-0{,}666667+$$

$$+0{,}250000-0{,}066667+0{,}013889-0{,}002381+0{,}000347-0{,}000044=0{,}528477,$$

при чемъ, такъ какъ рядъ — знакоперемѣнный, то ошибка меньше, чѣмъ

$$6 \cdot \frac{1}{2.10^6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8!},$$

т.-е. меньше 0,000008.

Слѣдствіе 2. *Если функція при* **всякомъ** x *на участкѣ* (x_0, X) *разлагается въ безконечный рядъ* **по формулѣ Маклорена,** (*т.-е. по* **цѣлымъ,** *положительнымъ и возрастающимъ степенямъ* x*'а*), то и функція $\int_0^x f(x)\,dx$ *разлагается въ подобный рядъ, при чемъ онъ получается* **почленнымъ интегрированіемъ перваго ряда.**

Прим. 1 — **разложеніе** $\operatorname{Arcsin} x$.

Такъ какъ $\operatorname{Arcsin}'_x x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{-\frac{1}{2}}{1}x^2 +$

$$+ \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}x^4 - \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{1.2.3}x^6 + \ldots. =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots.,$$

при чемъ это разложеніе справедливо при всякомъ x, представляющемъ правильную дробь, то, слѣд.,

$$\operatorname{Arcsin} x = \int_0^x dx + \frac{1}{2}\int_0^x x^2\,dx + \frac{1.3}{2.4}\int_0^x x^4\,dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}\int_0^x x^6\,dx + \ldots.,$$

т.-е. $$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots.,$$

при чемъ и *это разложеніе справедливо при всякомъ* x, *равномъ* **правильной дроби** (*положительной или отрицательной*).

Прим. 2. — **разложеніе** $l(1+x)$.

Такъ какъ $l'_x(1+x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots.,$ если только $|x| < 1$, то, слѣд.,

$$l(1+x)=\int_0^1 dx-\int_0^1 xdx+\int_0^1 x^2\,dx-\int_0^1 x^3\,dx+\ldots,$$

т.-е. $$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots,$$

при чемъ и *это разложеніе справедливо при условіи, что* $|x|<1$.

49. Прим. 3 — разложеніе $\operatorname{Arctg} x$ **въ рядъ Маклорена.**

Если x — *правильная, положительная или отрицательная, дробь*, то простымъ дѣленіемъ получаемъ:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots,$$

при чемъ рядъ этотъ — сходящійся при всякомъ такомъ x'ѣ; слѣд.,

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\int_0^x dx-\int_0^x x^2\,dx+\int_0^x x^4\,dx-\int_0^x x^6\,dx+\ldots,$$

т.-е. $$\operatorname{Arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots \quad \ldots\ldots\ldots(13),$$

причемъ *это разложеніе справедливо при всякомъ* x *на участкѣ* $(-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon)$, какъ бы мало ни было ε.

Не трудно, впрочемъ, убѣдиться, что оно справедливо и при $x=\pm 1$; дѣйствительно, такъ какъ рядъ (13) — знакоперемѣнный,

то $$\operatorname{Arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+R_n,$$

гдѣ $$R_n=(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\theta \text{ и } 0<\theta<1;$$

отсюда, подводя x къ единицѣ, получаемъ

$$\operatorname{Arctg} 1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+R_n,$$

гдѣ $R_n = \text{Пред.}\,(R_n)_{x\ldots 1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}\theta_0$ и $\theta_0 = \text{Пред.}\,(\theta)_{x\ldots 1}$,

при чемъ, очевидно, $0 \leqslant \theta_0 \leqslant 1$; и такъ какъ рядъ

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

— сходящійся, а $\text{пред.}\,(R_n)_{n\ldots\infty} = 0$, то, значитъ,

$$\text{Arctg}\,1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \ldots\ldots\ldots (14).$$

Такимъ образомъ *разложеніе (13) вѣрно при всякомъ x'ѣ на участкѣ* $(-1, +1)$.

50. Вычисленіе π. Разложеніе (14) даетъ средство вычислить $\text{Arctg}\,1$, т.-е. $\frac{\pi}{4}$ съ произвольной степенью точности, но только рядъ (14) сходится весьма медленно; можно, однако, на основаніи разложенія (13) получить для той же цѣли другіе ряды, весьма быстро сходящіеся. Напр., мы имѣемъ, какъ извѣстно,

что $\text{Arctg}\frac{1}{2} + \text{Arctg}\frac{1}{3} = \text{Arctg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \text{Arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$;

слѣд., $\frac{\pi}{4} = \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9 - \frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \right.$

$\left. + \frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{13} - \ldots\right\} + \left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \right.$

$\left. + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9 - \ldots\right\} = \left\{0{,}500000 - \frac{0{,}125000}{3} + \frac{0{,}031250}{5} - \frac{0{,}007813}{7} + \right.$

$\left. + \frac{0{,}001953}{9} - \frac{0{,}000488}{11} + \frac{0{,}000122}{13} - \ldots\right\} + \left\{0{,}333333 + \right.$

$\left. - \frac{0{,}037037}{3} + \frac{0{,}004115}{5} - \frac{0{,}000457}{7} + \frac{0{,}000051}{9} - \ldots\right\} \ldots\ldots\ldots (15)$;

воспользуемся этимъ разложеніемъ, что-бы вычислить π съ точностью до $\frac{1}{10^4}$. Ошибка въ $\frac{\pi}{4}$ тогда должна быть не больше

$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10^4}$, вслѣдствіе чего каждую изъ суммъ въ большихъ скобкахъ въ выраженіи (15) вычислимъ съ ошибкой не больше $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4.10^4}$; такъ какъ эта ошибка происходитъ, во-первыхъ, отъ отбрасыванія хвоста ряда, а во-вторыхъ, отъ неточности обращенія въ десятичныя дроби принятыхъ во вниманіе членовъ ряда, то ошибку отъ каждой изъ этихъ причинъ допустимъ не больше $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8.10^4}$. Въ такомъ случаѣ, имѣя въ виду знакоперемѣнность рядовъ, числа m и n принимаемыхъ во вниманіе членовъ ихъ, опредѣлимъ изъ условій:

$$\frac{1}{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1} \leqslant \frac{1}{16.10^4} \text{ и } \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} \leqslant \frac{1}{16.10^4}$$

или $(2m+1)\,2^{2m+1} \geqslant 16.10^4$ и $(2n+1)\,3^{2n+1} \geqslant 16.10^4$,

которыя показываютъ, что $m=7$ и $n=5$;

и такъ какъ 1-й и 3-й члены первой суммы выражаются въ десятичныхъ дробяхъ вполнѣ точно, то число знаковъ при обращеніи каждаго прочаго члена въ десятичную дробь опредѣлится условіемъ, что-бы въ *каждомъ* изъ нихъ ошибка была меньше $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16.10^4}=\frac{1}{8.10^5}$, т.-е. каждый изъ нихъ надо вычислить съ *шестью* десятичными знаками.

Поступая такъ, получимъ:

$$\frac{\pi}{4}=\{0{,}500000-0{,}041667+0{,}006250-0{,}001116+$$
$$+0{,}000217-0{,}000044+0{,}000009\}+\{0{,}333333+$$
$$-0{,}012346+0{,}000823-0{,}000065+$$
$$+0{,}000006\}=0{,}463640+0{,}321751=0{,}785391$$

и, слѣд., $\pi=3{,}14156$ т.-е. $\pi=3{,}1416$.

Подобнымъ же образомъ:

$$4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{5} = 2\,.\,2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{5} = 2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = 2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{5}{12} =$$

$$= \mathrm{Arctg}\,\frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \mathrm{Arctg}\,\frac{120}{119},$$

откуда $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{5} - \mathrm{Arctg}\,1 = \mathrm{Arctg}\,\frac{120}{119} - \mathrm{Arctg}\,1 =$

$$= \mathrm{Arctg}\,\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}\cdot 1} = \mathrm{Arctg}\,\frac{1}{239};$$

поэтому $4\,\mathrm{Arctg}\,1 = 16\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{5} - 4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{239}$,

т.-е. $\pi = 16\left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \frac{1}{9.5^9} - \frac{1}{11.5^{11}} + \ldots\right\} +$

$$- 4\left\{\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \ldots\right\} = 16\,\{0{,}2000000\;00 +$$

$$- 0{,}0026666\;67 + 0{,}0000640\;00 - 0{,}0000018\;29 +$$

$$+ 0{,}0000000\;59 - 0{,}0000000\;02\} +$$

$$- 4\,\{0{,}0041841\;00 - 0{,}0000000\;24\} = 3{,}1415926,$$

при чемъ ошибка меньше чѣмъ

$$72\,.\,0{,}000\;0000\;005 + 16\cdot\frac{1}{13.5^{13}} + 4\cdot\frac{1}{5.239^5} = 0{,}000\;0000\;36 +$$

$$+ 0{,}000\;0000\;01 = 0{,}000\;0000\;37 < 0{,}000\;0001.$$

51. Формула Тейлора. Положимъ, что *функція* $f(x)$ *и всѣ ея производныя до* n*'ой* **включительно** *непрерывны на участкѣ* $(a, a+h)$, *а* $(n+1)$*'ая производная интегрируема на немъ;*

тогда $$\int_a^{a+h} f'(x)\,dx = f(a+h) - f(a);$$

вводя же въ интегралѣ новую перемѣнную — именно, полагая

$$x = a + h - z \quad \text{и, слѣд.,} \quad dx = -dz,$$

получаемъ:

$$f(a+h) - f(a) = -\int_h^0 f'(a+h-z)\,dz = \int_0^h f'(a+h-z)\,dz.$$

Такъ какъ, по условію, $f(x)$ и ея производныя — непрерывны, то можемъ примѣнить послѣдовательно n разъ интегрированіе по частямъ; при этомъ получимъ:

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^h f'(a+h-z)\,dz = \Big| zf'(a+h-z) +$$

$$+ \int_0^h zf''(a+h-z)\,dz = hf'(a) + \int_0^h f''(a+h-z)\,d\frac{z^2}{1.2} =$$

$$= hf'(a) + \Big|_0^h \frac{z^2}{1.2} f''(a+h-z) + \frac{1}{1.2}\int_0^h z^2 f'''(a+h-z)\,dz =$$

$$= \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{1}{2!}\int_0^h f'''(a+h-z)\,d\frac{z^3}{3} = \frac{h}{1} f'(a) +$$

$$+ \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{1}{2!}\Big|_0^h \frac{z^3}{3} f'''(a+h-z) + \frac{1}{3!}\int_0^h z^3 f^{IV}(a+h-z)\,dz =$$

$$= \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \frac{1}{3!}\int_0^h f^{IV}(a+h-z)\,d\frac{z^4}{4} =$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$= \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) +$$

$$+ \frac{1}{n!}\int_0^h z^n f^{(n+1)}(a+h-z)\,dz,$$

откуда и выводимъ извѣстную формулу Тѣйлора:

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)\frac{h}{1}+f''(a)\frac{h^2}{2!}+\ldots.+f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!}+R_n \quad (16),$$

при чемъ $$R_n=\frac{1}{n!}\int_0^h z^n f^{(n+1)}(a+h-z)\,dz \ldots\ldots\ldots (17);$$

а если положимъ $z=ht$ и, слѣд., $dz=hdt$, то еще получимъ

$$R_n=\frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^h t^n f^{(n+1)}(a+h-ht)\,dt \ldots\ldots\ldots (18).$$

Замѣчаніе. Полагая $f'(x)=F(x)$, видимъ, что формула Тейлора можетъ служить для приближеннаго вычисленія $\int_a^{a+h} F(x)\,dx$, ибо даетъ:

$$\int_a^{a+h} F(x)\,dx=F(a)\frac{h}{1}+F'(a)\frac{h^2}{2!}+F''(a)\frac{h^3}{3!}+\ldots.+F^{(n-1)}(a)\frac{h^n}{n!}+R_n,$$

при чемъ $$R_n=\frac{1}{n!}\int_0^h z^n F^{(n)}(a+h-z)\,dz.$$

52. Предположимъ теперь, что и $f^{(n+1)}(x)$ **непрерывна на участкѣ** $(a, a+h)$ или, что то же самое, $f^{(n+1)}(a+h-ht)$ непрерывна на участкѣ $(0; 1)$; обозначимъ кромѣ того черезъ k — **цѣлое положительное число, не превышающее** $n+1$, такъ что $1\leqslant k\leqslant n+1$; тогда изъ (18), написавъ множитель t^n такъ: $t^{n+1-k}.t^{k-1}$, и примѣняя теорему № 46-го, получаемъ:

$$R_n=\frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 \left[t^{n+1-k}f^{(n+1)}(a+h-ht)\right]t^{k-1}\,dt=$$

$$= \frac{h^{n+1}}{n!}\left[\theta_0^{\,n+1-k} f^{(n+1)}(a + h - \theta_0 h)\right]\int_0^1 t^{k-1}\,dt =$$

$$= \frac{h^{n+1}}{n!}\,\frac{\theta_0^{\,n+1-k} f^{(n+1)}(a + h - h\theta_0)}{k},$$

гдѣ $$0 \leqslant \theta_0 \leqslant 1;$$

а полагая еще $1 - \theta_0 = \theta$, окончательно находимъ:

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{n!}\,\frac{f^{(n+1)}(a + \theta h)}{k}(1 - \theta)^{n+1-k} \quad \ldots\ldots(19),$$

при чемъ, очевидно, θ *есть* **правильная положительная** *дробь, величина коей зависитъ отъ вида функціи* $f(x)$ *и отъ величины чиселъ* a, h, n *и* k.

Послѣдняя форма дана остаточному члену Шлемильхомъ; если въ ней положимъ $k = 1$, то получимъ остаточный членъ Коши:

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{n!}(1 - \theta_1)^n f^{(n+1)}(a + \theta_1 h) \ldots\ldots(20),$$

а при $k = n + 1$ получимъ остаточный членъ Лаґранжа:

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta_2 h) \quad \ldots\ldots\ldots(21),$$

при чемъ *дроби* θ_1 и θ_2, на основаніи только что сказаннаго про θ, *различны между собой.*

Замѣчаніе. Если $f^{(n+1)}(x)$ **на участкѣ** $(a,\ a + h)$ **сохраняетъ знакъ,** то для избавленія остаточнаго члена R_n отъ знака интеграла можно, при примѣненіи теоремы № 46-го, вынести среднимъ значеніемъ изъ подъ этого знака не множитель $f^{(n+1)}(a+h-ht)$, а t^n; при этомъ получимъ:

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{n!}\theta^n \int_0^1 f^{(n+1)}(a + h - ht)\,dt = \frac{(\theta h)^n}{n!}\Big|_{t=0}^{t=1} - f^{(n)}(a + h - ht),$$

т.-е. $$R_n = \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{n!}(\theta h)^n \ldots\ldots\ldots (22),$$

при чемъ θ — **правильная положительная дробь**, *величина коей зависитъ отъ величины чиселъ* a, h, n *и отъ вида функціи* $f(x)$.

Выраженіе (22) можетъ во многихъ случаяхъ оказаться болѣе выгоднымъ для практики, чѣмъ выраженія (19), (20) и (21) (напр., тогда, когда общій законъ составленія производныхъ высшихъ порядковъ отъ $f(x)$ не намѣчается).

§ 3. Формулы квадратуръ.

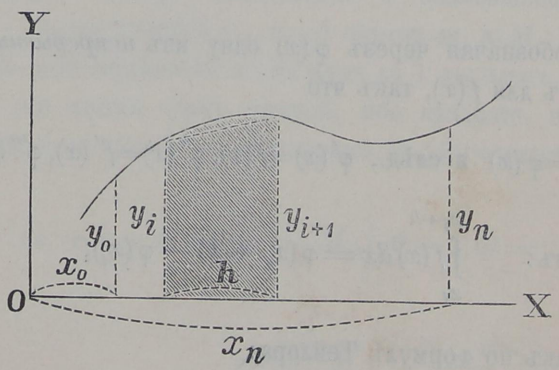
53. *Формулы квадратуръ служатъ для вычисленія приближенной величины*

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$$

въ случаѣ, когда извѣстны значенія

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots . f(x_{n-1}), f(x_n),$$

Черт. 10.



гдѣ $x_1, x_2, \ldots . x_{n-1}$ — *рядъ возрастающихъ значеній* x*'а* **промежуточныхъ** *между* x_0 *и* x_n. Свое названіе эти формулы полу-

чили оттого, что $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$ выражаетъ, какъ мы знаемъ, площадь, ограниченную осью OX, кривой $y=f(x)$ и ординатами послѣдней, отвѣчающими абсциссамъ x_0 и x_n. Самая общая, но зато и наиболѣе сложная изъ такихъ формулъ выведена Эйлеромъ, а остаточный ея членъ изученъ Остроградскимъ. Мы ограничимся лишь болѣе простыми формулами, при чемъ для сокращенія положимъ $f(x_i)=y_i$.

«Первая формула квадратуръ» или «формула трапецій».

54. Предположимъ, что функціи $f(x)$ *и* $f'(x)$ **непрерывны,** *а* $f''(x)$—**интегрируема** *на участкѣ* (x_0, x_n), и возьмемъ всѣ части $x_1-x_0, x_2-x_1, \ldots . x_n-x_{n-1}$ равными; тогда, обозначая ихъ общую величину черезъ h, такъ что

$$h=\frac{x_n-x_0}{n},$$

имѣемъ
$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx=\sum_{i=0}^{i=n-1}\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx.$$

Но, обозначая черезъ $\varphi(x)$ одну изъ *непрерывныхъ* первообразныхъ для $f(x)$, такъ что

$$\int f(x)\,dx=\varphi(x) \quad \text{и слѣд.,} \quad \varphi'(x)=f(x), \varphi''(x)=f'(x), \varphi'''(x)=f'''(x),$$

мы имѣемъ:
$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx=\varphi(x_i+h)-\varphi(x_i);$$

и такъ какъ по формулѣ Тейлора:

$$\varphi(x_i+h)-\varphi(x_i)=h\varphi'(x_i)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x_i)+\frac{h^3}{1.2}\int_0^1 t^2\varphi'''(x_i+h-ht)\,dt,$$

то

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx = hf(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i) + \frac{h^3}{2}\int_0^1 t^2 f''(x_i + h - ht)\,dt \ldots (23);$$

въ то же время, на основаніи формулы же Тейлора, имѣемъ:

$$f(x_i + h) - f(x_i) = hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}\int_0^1 tf''(x_i + h - ht)\,dt \quad (24);$$

поэтому, вычитая изъ равенства (23) произведеніе (24) на $\frac{h}{2}$, получаемъ:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx - \frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{2} h = hf(x_i) + \frac{h^3}{2}\int_0^1 (t^2 - t) f''(x_i + h - ht)\,dt,$$

откуда

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx = h\frac{f(x_i) + f(x_i+h)}{2} + \frac{h^3}{2}\int_0^1 (t^2 - t) f''(x_i + h - ht)\,dt \ldots (25).$$

Обозначимъ теперь наименьшее и наибольшее значенія функціи $f''(x)$ на участкѣ (x_i, x_{i+1}) черезъ m_i и M_i; тогда, замѣчая, что при измѣненіи z отъ нуля до 1 двучленъ $z^2 - z$ сохраняетъ все время знакъ минусъ, ибо квадратъ правильной дроби меньше ея самой, мы по теоремѣ № 46-го получаемъ, что

$$\int_0^1 (t^2 - t) f''(x_i + h - ht)\,dt = \overline{(m_i, M_i)}\int_0^1 (t^2 - t)\,dt =$$

$$= \overline{(m_i, M_i)} \cdot \left|\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)\right|_0^1 = -\frac{\overline{(m_i, M_i)}}{6};$$

и такъ какъ $f(x_i) = y_i$ и $f(x_i + h) = f(x_{i+1}) = y_{i+1}$,

то $$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx = h\frac{y_i+y_{i+1}}{2} - \frac{h^3}{12}\overline{(m_i, M_i)},$$

а слѣд.,

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = h\left\{\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\ldots.+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right\} - \frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{i=n-1}\overline{(m_i, M_i)} =$$

$$= h\left\{\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots.+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right\} - \frac{h^3.n}{12}\cdot\frac{\sum_{i=0}^{i=n-1}\overline{(m_i, M_i)}}{n} =$$

$$= h\left\{\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots.+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right\} - \frac{h^3 n}{12}\cdot\overline{(m, M)},$$

гдѣ m и M — наименьшее и наибольшее значенія функціи $f''(x)$ на *полномъ* участкѣ (x_0, x_n), а $\overline{(m, M)}$ — нѣкоторое среднее между ними; и такъ какъ

$$hn = x_n - x_0,$$

то, значитъ, окончательно

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = h\left\{\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots.+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right\} - \frac{h^2(x_n-x_0)}{12}\overline{(m, M)} \quad (26).$$

55. Въ послѣднемъ равенствѣ *первый членъ — служебный:* онъ и даетъ **приближенную** величину искомаго интеграла; второй же членъ опредѣляетъ дѣлаемую при этомъ **погрѣшность**, *въ предположеніи, что* **всѣ ординаты** $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ **вычислены точно**; *если же сами эти ординаты найдены каждая съ ошибкой* δ, *то*, очевидно, **полная ошибка**, *которую мы сдѣлаемъ, считая*

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = h\left\{\frac{y_0}{2}+y_1+\ldots.+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right\} \ldots.(27),$$

можетъ быть равна

$$hn\delta + \frac{h^2(x_n-x_0)}{12}\left|\overline{(m, M)}\right| = (x_n - x_0)\,\delta + \frac{(x_n-x_0)^3}{12n^2}\left|\overline{(m, M)}\right|;$$

поэтому, если хотимъ, чтобы эта ошибка была меньше ε, то надо n выбрать такъ, чтобы удовлетворялось условіе:

$$(x_n - x_0)\,\delta + \frac{(x_n - x_0)^3}{12n^2}\,|(\overline{m, M})| \leqslant \varepsilon;$$

а такъ какъ дѣйствительная величина числа $(\overline{m, M})$ намъ неизвѣстна, то это условіе надо замѣнить такимъ

$$(x_n - x_0)\,\delta + \frac{(x_n - x_0)^3}{12n^2}\,\mathcal{M} \leqslant \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots (28),$$

гдѣ $\mathcal{M}$ — *наибольшая изъ* **абсолютныхъ величинъ** *функціи* $f''(x)$ *на участкѣ* (x_0, x_n).

Прим. 1. *Найти* $l2$ *съ точностью до 0,001.*

Такъ какъ $l2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ и $\left(\frac{1}{x}\right)'' = \frac{2}{x^3}$, то $\mathcal{M} = 2$;

если $y_0, y_1, \ldots$ вычислимъ съ тремя знаками, то въ каждой изъ этихъ величинъ сдѣлаемъ ошибку не $> \frac{1}{2000}$, такъ что $\delta = \frac{1}{2000}$; значитъ, должны имѣть:

$$\frac{2-1}{2000} + \frac{(2-1)^3}{12n^2} \cdot 2 \leqslant \frac{1}{1000},$$

откуда

$$\frac{1}{6n^2} \leqslant \frac{1}{2000}$$

и, слѣд.,

$$n^2 \geqslant \frac{1000}{3} > 333, \text{ такъ что } n > 18.$$

Беря

$$n = 19 \text{ и, значитъ, } h = \frac{1}{19},$$

получаемъ

$$l2 = \frac{1}{19}\left\{\frac{1}{2} + \frac{19}{20} + \frac{19}{21} + \ldots + \frac{19}{37} + \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{19}\{0{,}500 + 0{,}950 + 0{,}905 +$$

$$+ 0{,}864 + 0{,}826 + 0{,}792 + 0{,}760 + 0{,}731 + 0{,}704 + 0{,}679 + 0{,}655 + 0{,}633 +$$

$$+ 0{,}613 + 0{,}594 + 0{,}576 + 0{,}559 + 0{,}543 + 0{,}528 + 0{,}513 + 0{,}250\} = \frac{13{,}175}{19} = 0{,}693.$$

Прим. 2. *Найти* π *съ точностью до 0,01.*

Такъ какъ $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, откуда $\pi = 4\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$,

то, слѣд., послѣдній $\int$ надо найти съ точностью до $\frac{1}{400}$.

Здѣсь

$$x_0 = 0,\ x_n = 1,\ x_n - x_0 = 1,\ f(x) = \frac{1}{x^2+1},\ f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2},\ f''(x) = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3};$$

и такъ какъ $$f'''(x) = \frac{24x(1-x^2)}{(x^2+1)^4} > 0$$

при всякомъ x на участкѣ $(0;\ 1)$, то, слѣд., $f''(x)$ *растетъ на этомъ участкѣ* вмѣстѣ съ x, а потому

$$m = f''(0) = -2,\quad M = f''(1) = \frac{1}{2} \text{ и, значитъ, } \mathcal{M} = 2.$$

Поэтому, вычисляя y_i съ тремя десятичными знаками, такъ что $\delta = \frac{1}{2000}$,

будемъ имѣть: $$\frac{1}{2000} + \frac{2}{12n^2} \leqslant \frac{1}{400} \quad \text{или} \quad \frac{1}{6n^2} \leqslant \frac{1}{500},$$

откуда $$n^2 \geqslant \frac{500}{6} > 83 \quad \text{и, слѣд.,} \quad n = 10,\quad h = \frac{1}{10},$$

а $$\pi = 4 \cdot \frac{1}{10}\left\{\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_9 + \frac{y_{10}}{2}\right\} =$$

$$= \frac{2}{5}\left\{\frac{1}{2} + \frac{100}{101} + \frac{100}{104} + \frac{100}{109} + \frac{100}{116} + \frac{100}{125} + \frac{100}{136} + \frac{100}{149} + \frac{100}{164} + \frac{100}{181} + \frac{1}{4}\right\} =$$

$$= \frac{2}{5}\{0{,}500 + 0{,}990 + 0{,}962 + 0{,}918 + 0{,}862 + 0{,}800 + 0{,}735 + 0{,}670 +$$

$$+ 0{,}610 + 0{,}552 + 0{,}250\} = \frac{2}{5} \cdot 7{,}852 = 3{,}1408,\ \text{т.-е.}\ \pi = 3{,}14.$$

56. Произведеніе $h\frac{y_i + y_{i+1}}{2}$ представляетъ, какъ извѣстно, величину площади трапеціи (черт. 10), ограниченной осью OX, ординатами y_i, y_{i+1}, и прямою, соединяющей ихъ концы. Такимъ образомъ вычисленіе $\int\limits_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$ по формулѣ (27) равносильно замѣнѣ кривой $y = f(x)$ вписанною въ нее ломанной, вершины

которой имѣютъ абсциссы $x_0, x_1, \ldots . x_n$; отсюда происходитъ и само названіе формулы (27): «*формула трапецій*».

57. Замѣчаніе 1. При примѣненіи «формулы трапецій», для уменьшенія числа промежуточныхъ ординатъ часто бываетъ выгодно увеличить точность вычисленія каждой изъ нихъ; напр., если бы въ 1-мъ примѣрѣ № 55-го мы вычисляли бы ординаты съ 4-мя знаками, то для опредѣленія n получили бы условіе:

$$\frac{1}{20000} + \frac{1}{12n^2} \cdot 2 \leqslant \frac{1}{1000} \quad \text{или} \quad \frac{1}{6n^2} \leqslant \frac{19}{20000},$$

откуда $$n^2 \geqslant \frac{10000}{57} > 175 \quad \text{и, слѣд.,} \quad n \geqslant \sqrt{176} = 13, \ldots .$$

т.-е. $$n = 14.$$

Съ тою же цѣлью уменьшенія числа промежуточныхъ ординатъ часто можетъ быть полезно предварительно раздѣлить полный участокъ (x_0, x_n) на нѣсколько отдѣльныхъ и къ каждому изъ нихъ примѣнить самостоятельно «формулу трапецій»; напр., если бы для нахожденія $l3$, т.-е. $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ съ точностью до 0,001 мы примѣнили бы эту формулу непосредственно, то, вычисляя ординаты съ 4 знаками, получили бы для опредѣленія n условіе:

$$\frac{3-1}{20000} + \frac{(3-1)^3}{12n^2} \cdot 2 \leqslant \frac{1}{1000} \quad \text{или} \quad n^2 \geqslant \frac{40000}{27} > 1481,$$

откуда $n = 39$. Такъ какъ это число велико, то мы примѣнимъ равенство:

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} = \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x};$$

тогда, вычисляя каждый слагаемый интегралъ съ точностью до $\frac{1}{2000}$, получимъ слѣдующіе результаты.

1) Такъ какъ на участкѣ (1; 2) имѣемъ, что для функціи $\left(\frac{1}{x}\right)''$ или $\frac{2}{x^3}$ величина $\mathcal{M} = 2$, то

$$\frac{2-1}{20000} + \frac{(2-1)^3}{12n^2} \cdot 2 \leqslant \frac{1}{2000} \quad \text{или} \quad \frac{1}{6n^2} \leqslant \frac{9}{20000},$$

откуда $$n^2 \geqslant \frac{10000}{27} > 370, \text{ т.-е. } n = 20,$$

а потому $$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{20}\left\{\frac{1}{2} + \frac{20}{21} + \frac{20}{22} + \ldots + \frac{20}{39} + \frac{1}{4}\right\} =$$

$$= \frac{1}{20}\{0{,}5000 + 0{,}9524 + 0{,}9091 + 0{,}8696 + 0{,}8333 + 0{,}8000 + 0{,}7692 + 0{,}7407 +$$

$$+ 0{,}7143 + 0{,}6896 + 0{,}6667 + 0{,}6452 + 0{,}6250 + 0{,}6061 + 0{,}5882 + 0{,}5714 +$$

$$+ 0{,}5455 + 0{,}5405 + 0{,}5263 + 0{,}5127 + 0{,}2500\} = \frac{13{,}8558}{20} = 0{,}6928.$$

2) На участкѣ (2; 3) для функціи $\frac{2}{x^3}$ имѣемъ $\mathcal{M} = \frac{1}{4}$, а потому

$$\frac{3-2}{20000} + \frac{(3-2)^3}{12n^2} \cdot \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2000} \text{ или } n^2 \geqslant \frac{20000}{9.48} = \frac{1250}{27} = 46,$$

откуда $$n = 7$$

и, слѣд., $$\int_2^3 \frac{dx}{x} = \frac{1}{7}\left\{\frac{0{,}5000}{2} + \frac{7}{15} + \frac{7}{16} + \frac{7}{17} + \frac{7}{18} + \frac{7}{19} + \frac{7}{20} + \frac{0{,}3333}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{7}\{0{,}2500 + 0{,}4667 + 0{,}4375 + 0{,}4118 + 0{,}3889 + 0{,}3684 +$$

$$+ 0{,}3500 + 0{,}1667\} = \frac{2{,}8400}{7} = 0{,}4057.$$

Значитъ, $$l3 = 0{,}6928 + 0{,}4057, \text{ т.-е. } l3 = 1{,}099.$$

Замѣчаніе 2. При освобожденіи въ № 54-мъ остаточнаго члена формулы (25) отъ знака интеграла можно, *въ случаѣ, когда* $f''(x)$ *сохраняетъ знакъ на участкѣ* (x_i, x_{i+1}), вынести множитель $t^2 - t$ его среднимъ значеніемъ за знакъ интеграла; поступая такъ, и обозначая при этомъ черезъ θ_0 нѣкоторую правильную положительную дробь, получимъ:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx = h\frac{y_i + y_{i+1}}{2} + \frac{h^3}{2}(\theta_0^2 - \theta_0)\int_0^1 f''(x_i + h - ht)\,dt =$$

$$= h\frac{y_i + y_{i+1}}{2} - h^2\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{2}\Big|_0^1 - f'(x_i + h - ht) =$$

$$= h\frac{y_i + y_{i+1}}{2} - h^2\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{2}[f'(x_{i+1}) - f'(x_i)],$$

т.-е. $$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx = h\,\frac{y_i + y_{i+1}}{2} + R_i,$$

при чемъ, такъ какъ $[\theta_0(1-\theta_0)]_{max.} = \frac{1}{4}$,

то $$R_i = -\theta_i \frac{h^2}{8}[f'(x_{i+1}) - f'(x_i)],$$

гдѣ θ_i — нѣкоторая правильная положительная дробь.

Предполагая теперь, что $f''(x)$ **сохраняетъ знакъ на всемъ участкѣ** (x_0, x_n), т.-е. что $f'(x)$ *на немъ либо все время растетъ, либо все время убываетъ*, получимъ:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = h\left\{\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right\} + R \ldots (29).$$

при чемъ

$$R = -\sum_{i=0}^{i=n-1} \theta_i \frac{h^2}{8}[f'(x_{i+1}) - f'(x_i)] = -\theta\frac{h^2}{8}\sum_{i=0}^{i=n-1}[f'(x_{i+1}) - f'(x_i)],$$

гдѣ θ — число, промежуточное между всѣми θ_i, т.-е. θ — *правильная положительная дробь;* дѣлая приведеніе, находимъ:

$$R = \theta\frac{h^2}{8}[f'(x_0) - f'(x_n)] \ldots\ldots\ldots (30).$$

Это выраженіе во многихъ случаяхъ значительно удобнѣе, чѣмъ выведенное въ № 54-мъ: во-первыхъ, въ него входятъ *лишь два крайнихъ* значенія *первой* производной отъ $f(x)$, т.-е. *угловаго коэффиціента касательной*, такъ что *о величинѣ* R *легко составить представленіе* **по графику** *кривой* $y = f(x)$; а во-вторыхъ, часто величины $|f'(x)|$ меньше maximum'а величины $|f''(x)|$ на томъ же участкѣ.

Примѣръ. Найти $l2$, т.-е. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ съ точностью до 0,001. Такъ какъ $f'(x)$, т.-е. $-\frac{1}{x^2}$ на участкѣ $(1;2)$ все время растетъ, такъ что $f''(x)$ все время > 0, то число n промежуточныхъ ординатъ, вычисляемыхъ съ 4 знаками, опредѣлимъ изъ условія:

$$\frac{2-1}{20000}+\frac{(2-1)^2}{8n^2}[f'(1)-f'(2)] \leqslant \frac{1}{1000} \quad \text{или} \quad \frac{\frac{1}{1}-\frac{1}{4}}{8n^2} \leqslant \frac{19}{20000},$$

откуда $$n^2 \geqslant \frac{1875}{19}, \text{ т.-е. } n = 10.$$

Если $f''(x)$ на участкѣ (x_0, x_n) мѣняетъ знакъ, т.-е. *кривая $y = f(x)$ мѣняетъ направленіе своей вогнутости*, то надо этотъ участокъ предварительно раздѣлить на такія части, на каждой изъ коихъ $f''(x)$ сохраняетъ знакъ (точками перегиба помянутой кривой).

Формула квадратуръ Симпсона.

59. Предположимъ, что *число частей участка* (x_0, x_n) — **четное**, *т.-е.* $n = 2k$; *что опять*

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_{2k} - x_{2k-1} = h = \frac{x_{2k} - x_0}{2k};$$

и что функціи $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ *и* $f'''(x)$ *непрерывны, а* $f^{IV}(x)$ *интегрируема на участкѣ* (x_0, x_{2k}); тогда можемъ написать, что

$$\int_{x_0}^{x_{2k}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{i=k-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2(i+1)}} f(x)\,dx.$$

Но, обозначая опять черезъ $\varphi(x)$ одну изъ *непрерывныхъ* первообразныхъ для $f(x)$,

такъ что $\int f(x)\,dx = \varphi(x)$, откуда $\varphi'(x) = f(x)$, $\varphi''(x) = f'(x)$,....

мы имѣемъ: $$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \varphi(a+h) - \varphi(a),$$

а такъ какъ по формулѣ Тейлора:

$$\varphi(a+h)-\varphi(a)=h\varphi'(a)+\frac{h^2}{2!}\varphi''(a)+\frac{h^3}{3!}\varphi'''(a)+$$

$$+\frac{h^4}{4!}\varphi^{IV}(a)+\frac{h^5}{4!}\int_0^1 t^4\varphi^{V}(a+h-ht)\,dt,$$

то $$\int_a^{a+h} f(x)\,dx=hf(a)+\frac{h^2}{2!}f'(a)+\frac{h^3}{3!}f''(a)+$$

$$+\frac{h^4}{4!}f'''(a)+\frac{h^5}{4!}\int_0^1 t^4 f^{IV}(a+h-ht)\,dt,$$

и точно такъ же $$\int_{a-h}^{a} f(x)\,dx=-\int_a^{a-h} f(x)\,dx=hf(a)-\frac{h^2}{2!}f'(a)+$$

$$+\frac{h^3}{3!}f''(a)-\frac{h^4}{4!}f'''(a)+\frac{h^5}{4!}\int_0^1 t^4 f^{IV}(a-h+ht)\,dt.$$

(Это разложеніе получаемъ изъ предыдущаго замѣною h на $-h$ и перемѣной затѣмъ знаковъ всѣхъ членовъ). Складывая эти два равенства, находимъ:

$$\int_{a-h}^{a+h} f(x)\,dx=2hf(a)+2\frac{h^3}{3!}f''(a)+\frac{h^5}{4!}\int_0^1 t^4[f^{IV}(a+h-ht)+$$

$$+f^{IV}(a-h+ht)]\,dt \quad \ldots\ldots\ldots (31).$$

Подобнымъ же образомъ

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f'''(a)+\frac{h^4}{3!}\int_0^1 t^3 f^{IV}(a+h-ht)\,dt$$

и

$$f(a-h)=f(a)-hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)-\frac{h^3}{3!}f'''(a)+\frac{h^4}{3!}\int_0^1 t^3 f^{IV}(a-h+ht)\,dt,$$

откуда $f(a+h)+f(a-h)=2f(a)+2\frac{h^2}{2!}f''(a)+$

$$+\frac{h^4}{3!}\int_0^1 t^3[f^{IV}(a+h-ht)+f^{IV}(a-h+ht)]\,dt.$$

Помноживъ это равенство на $\frac{h}{3}$ и вычтя произведеніе изъ (31), получаемъ:

$$\int_{a-h}^{a+h} f(x)\,dx-\frac{h}{3}[f(a+h)+f(a-h)]=\frac{4}{3}hf(a)+$$

$$+\frac{h^5}{3!}\int_0^1\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}\right)[f^{IV}(a+h-ht)+f^{IV}(a-h+ht)]\,dt\,..(32);$$

и такъ какъ двучленъ $\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}$ сохраняетъ, очевидно, знакъ минусъ при измѣненіи t отъ нуля до 1 (ибо величина степени правильной дроби тѣмъ меньше, чѣмъ выше ея показатель), то, примѣняя теорему № 46-го и обозначая при этомъ черезъ m и M наименьшее и наибольшее значенія функціи $f^{IV}(x)$ на участкѣ (x_0, x_{2k}), находимъ:

$$\int_{a-h}^{a+h} f(x)\,dx=\frac{h}{3}[f(a-h)+4f(a)+f(a+h)]+$$

$$+2\overline{(m,M)}\frac{h^5}{1.2.3}\int_0^1\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}\right)dt=\frac{h}{3}[f(a-h)+4f(a)+$$

$$+f(a+h)]+\overline{(m,M)}\frac{h^5}{3}\cdot\left|\left(\frac{t^5}{20}-\frac{t^4}{12}\right)\right|_0^1=\frac{h}{3}[f(a-h)+$$

$$+4f(a)+f(a+h)]-\frac{h^5}{90}\overline{(m,M)}.$$

Отсюда, полагая $a=x_{2i+1}$

и, слѣд., $a-h=x_{2i}$, $a+h=x_{2(i+1)}$,

выводимъ:

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2(i+1)}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right] - \frac{h^5}{90}\overline{(m, M)}$$

или

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2(i+1)}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}\right) - \frac{h^5}{90}\overline{(m, M)},$$

а слѣд.,

$$\int_{x_0}^{x_{2k}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{i=k-1} \frac{h}{3}\left(y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}\right) - \frac{h^5}{90}\sum \overline{(m, M)} =$$

$$= \frac{h}{3}\left\{(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \right.$$

$$\left. + (y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})\right\} - \frac{h^4 . h . 2k}{90 . 2} \cdot \frac{\Sigma\overline{(m, M)}}{k},$$

такъ что окончательно

$$\int_{x_0}^{x_{2k}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left\{(y_0 + y_{2k}) + 2\,(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2k-2}) + \right.$$

$$\left. + 4\,(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2k-1})\right\} - h^4 \frac{x_{2k} - x_0}{180}\overline{\overline{(m, M)}},$$

гдѣ $\overline{\overline{(m, M)}}$ — нѣкоторое новое среднее между всѣми значеніями $f^{IV}(x)$ на участкѣ (x_0, x_{2k}).

60. При примѣненіи этого послѣдняго равенства считаютъ, что **приближенно**

$$\int_{x_0}^{x_{2k}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left\{y_0 + y_{2k}) + 2\,[y_2 + y_4 + \ldots + y_{2k-2}] + \right.$$

$$\left. + 4\,[y_1 + y_3 + \ldots + y_{2k-1}]\right\} \ldots\ldots\ldots (33)$$

что и представляетъ формулу квадратуръ Симпсона; добавочный же членъ $\frac{(x_{2k}-x_0)\overline{\overline{(m, M)}}}{180}h^4$ опредѣляетъ ошибку, получаемую при такомъ вычисленіи интеграла $\int_{x_0}^{x_{2k}} f(x)\,dx$, *въ предположеніи, что* всѣ ординаты $y_0, y_1, \ldots . y_{2k}$ вычислены точно. *Если же въ каждой изъ нихъ мы дѣлаемъ погрѣшность* δ, *то* полная ошибка, *получающаяся при пользованіи формулой Симпсона, можетъ*, очевидно, быть *равна*

$$\frac{h}{3}[2 + 2(k-1) + 4k]\delta + \frac{x_{2k}-x_0}{180}h^4\left|\overline{\overline{(m, M)}}\right| =$$

$$= (x_{2k}-x_0)\delta + \frac{(x_{2k}-x_0)^5}{180(2k)^4}\left|\overline{\overline{(m, M)}}\right|;$$

значитъ, если хотимъ, чтобы эта полная ошибка была не больше ε, то $2k$ должны опредѣлить изъ неравенства

$$(x_{2k}-x_0)\delta + \frac{(x_{2k}-x_0)^5}{180(2k)^4}\left|\overline{\overline{(m, M)}}\right| \leqslant \varepsilon,$$

въ виду же неизвѣстности множителя $\overline{\overline{(m, M)}}$ — изъ неравенства

$$(x_{2k}-x_0)\delta + \frac{(x_{2k}-x_0)^5}{180(2k)^4}\mathcal{M} \leqslant \varepsilon,$$

гдѣ $\mathcal{M}$ — *наибольшая изъ* абсолютныхъ величинъ *функціи* $f^{IV}(x)$ *на участкѣ* (x_0, x_{2k}).

Прим. 1. *Вычислить* $l2$ *съ точностью до 0,001 по формулѣ Симпсона.*

Такъ какъ $$l2 = \int_1^2 \frac{dx}{x},$$

то $$f(x) = \frac{1}{x},\ f^{IV}(x) = \frac{24}{x^5},$$ и, слѣд., $\mathcal{M} = 24$,

а потому $2k$ найдемъ изъ условія:

$$\frac{2-1}{2000} + 24\frac{(2-1)^5}{180(2k)^4} \leqslant \frac{1}{1000},$$

откуда $$2k \geqslant \sqrt[4]{\frac{48000}{180}} > \sqrt[4]{266} > \sqrt{16} = 4.$$

Беря поэтому $$2k = 6 \text{ и, слѣд., } h = \frac{1}{6},$$

получаемъ:

$$l2 = \frac{1}{18}\left\{\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{6}{8} + \frac{6}{10}\right) + 4\left(\frac{6}{7} + \frac{6}{9} + \frac{6}{11}\right)\right\} = \frac{1}{18}\{1 + 0{,}500 +$$

$$+ 1{,}500 + 1{,}200 + 4\,(0{,}857 + 0{,}667 + 0{,}545)\} = \frac{12{,}476}{18} = 0{,}693.$$

Прим. 2. *Найти* π *съ точностью до 0,001*

Такъ какъ $$\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1},$$

то этотъ интегралъ надо вычислить съ точностью до $\frac{1}{4000}$, почему каждую изъ ординатъ будемъ вычислять съ точностью до 0,0001, такъ что $\delta = \frac{1}{20000}$.

При этомъ

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1},\ f'''(x) = \frac{24\,(x - x^3)}{(x^2 + 1)^4},\ f^{IV}(x) = 24\,\frac{5x^4 - 10x^2 + 1}{(x^2 + 1)^5};$$

кромѣ того $$f^{V}(x) = -\,240x\,\frac{3x^4 - 10x^2 + 3}{(x^2 + 1)^6}$$

и такъ какъ корни ур-нія $3x^4 - 10x^2 + 3 = 0$ суть $\sqrt{3}$ и $\frac{\sqrt{3}}{3}$, то $f^{V}(x) < 0$ на участкѣ $\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и $f^{V}(x) > 0$ на участкѣ $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right)$, а слѣд., $f^{IV}(x)$ убываетъ на первомъ участкѣ и растетъ на второмъ; имѣя еще въ виду что $f^{IV}(0) = 24$, $f^{IV}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{81}{8}$ и $f^{IV}(1) = -3$, заключаемъ, что $m = -\frac{81}{8}$, $M = 24$ и, слѣд., $\mathcal{M} = 24$, почему число $2k$ опредѣлится изъ условія:

$$\frac{1}{20000} + 24\,\frac{1^5}{180\,(2k)^4} \leqslant \frac{1}{4000} \text{ или } \frac{4}{30\,(2k)^4} \leqslant \frac{1}{5000},$$

откуда $$2k \geqslant \sqrt[4]{\frac{2000}{3}} > \sqrt[4]{666} > \sqrt{25} = 5$$

и, слѣд., $$2k = 6, \text{ а } h = \frac{1}{6}.$$

Значитъ $$\pi = 4 \cdot \frac{1}{18}\left\{(1 + 0{,}5) + 2\left(\frac{36}{40} + \frac{36}{52}\right) + 4\left(\frac{36}{37} + \frac{36}{45} + \frac{36}{61}\right)\right\} =$$

$$= \frac{2}{9}\{1{,}5000 + 2.1{,}5923 + 4.2{,}3632\} = \frac{2}{9} \cdot 14{,}1374 = 3{,}1416,$$

т.-е. $$\pi = 3{,}142.$$

61. Замѣчаніе 1. Какъ и при пользованіи «формулой трапецій», для уменьшенія числа промежуточныхъ ординатъ можетъ оказаться выгоднымъ, во-первыхъ, *увеличивать точность вычисленія каждой изъ нихъ*, а во-вторыхъ, *дѣлить предварительно участокъ интегрированія на части и затѣмъ на каждой изъ нихъ примѣнять формулу Симпсона самостоятельно.*

Примѣръ. *Найти* $l5$ *съ точностью до 0,001.*

Такъ какъ $$l5 = \int_1^5 \frac{dx}{x},$$

то, примѣняя формулу Симпсона непосредственно и вычисляя промежуточныя ординаты съ 4 знаками, получили бы, что

$$\mathcal{M} = f^{\mathrm{IV}}(1) = 24$$

и, слѣд., $$\frac{5-1}{20000} + 24\frac{(5-1)^5}{180\,(2k)^4} \leqslant \frac{1}{1000} \text{ или } \frac{4^6}{30(2k)^4} \leqslant \frac{1}{1250},$$

откуда $$2k \geqslant \sqrt[4]{\frac{125 \cdot 4^6}{3}} > 8\sqrt{41} > 48,$$

т.-е. $2k = 50$, что чрезвычайно велико. Поэтому пишемъ, что

$$l5 = \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^5 \frac{dx}{x}$$

и дальше поступаемъ слѣдующимъ образомъ.

1) На участкѣ (1; 2) имѣемъ, что

$$\mathcal{M} = f^{\mathrm{IV}}(1) = 24$$

и, слѣд., $$\frac{2-1}{20000} + 24\frac{(2-1)^5}{180\,(2k)^4} \leqslant \frac{1}{2000} \text{ или } \frac{2}{15\,(2k)^4} \leqslant \frac{9}{20000},$$

откуда $$2k \geqslant \sqrt[4]{\frac{40000}{135}} = \sqrt[4]{\frac{8000}{27}} > \sqrt[4]{296} > \sqrt{17} > 4,$$

т.-е. $$2k = 6,\ h = \frac{1}{6}$$

и потому $$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{18}\left\{\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{6}{8} + \frac{6}{10}\right) + 4\left(\frac{6}{7} + \frac{6}{9} + \frac{6}{11}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{18}\{1{,}5000 + 2.1{,}3500 + 4.2{,}0693\} = \frac{12{,}4772}{18} = 0{,}6932.$$

2) На участкѣ (2; 5) имѣемъ

$$\mathcal{M} = f^{IV}(2) = \frac{24}{2^5} = \frac{3}{4},$$

почему $$\frac{5-2}{20000} + \frac{3}{4}\,\frac{(5-2)^5}{180\,(2k)^4} \leqslant \frac{1}{2000} \text{ или } \frac{3^4}{80\,(2k)^4} \leqslant \frac{7}{20000},$$

откуда $$2k \geqslant \sqrt[4]{\frac{250}{7}}\,3^4 > 3\sqrt[4]{36} = 3\sqrt{6} > 6,$$

т.-е. $$2k = 8 \text{ и, слѣд., } h = \frac{5-2}{8} = \frac{3}{8},$$

а потому $$\int_2^5 \frac{dx}{x} = \frac{1}{8}\left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) + 2\left(\frac{8}{22} + \frac{8}{28} + \frac{8}{34}\right) + 4\left(\frac{8}{19} + \frac{8}{25} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{8}{31} + \frac{8}{37}\right)\right\} = \frac{1}{8}\{(0{,}5000 + 0{,}2000) + 2\,(0{,}3636 + 0{,}2857 + 0{,}2353) +$$

$$+ 4\,(0{,}4211 + 0{,}3200 + 0{,}2581 + 0{,}2162)\} = \frac{1}{8}\{0{,}7000 + 2.0{,}8846 +$$

$$+ 4.1{,}2154\} = \frac{7{,}3308}{8} = 0{,}9164.$$

Поэтому $$l5 = 0{,}6932 + 0{,}9164, \text{ т.-е. } l5 = 1{,}610.$$

62. Замѣчаніе 2. *Если $f^{IV}(x)$ сохраняетъ знакъ на всемъ участкѣ $(a - h,\ a + h)$*, то при преобразованіи остаточнаго члена R_i равенства (32) въ № 59 можно вынести за знакъ интеграла среднимъ значеніемъ множитель $\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3}$; при этомъ, обозначая черезъ θ нѣкоторую правильную положительную дробь, получимъ:

$$R_i = \frac{h^5}{3!}\left(\frac{\theta^4}{4} - \frac{\theta^3}{3}\right)\int_0^1 [f^{IV}(a+h-ht) + f^{IV}(a-h+ht)]\,dt =$$

$$= \frac{h^4}{3!}\,\frac{3\theta^4 - 4\theta^3}{12}\Big|_0^1 \{-f'''(a+h-ht) + f'''(a-h+ht)\} =$$

$$= \frac{h^4}{4!}\,\frac{3\theta^4 - 4\theta^3}{3}\{f'''(a+h) - f'''(a-h)\};$$

но, полагая, $\varphi(\theta) \equiv -(3\theta^4 - 4\theta^3)$,

имѣемъ:

$\varphi'(\theta) \equiv 12(\theta^2 - \theta^3)$, $\varphi''(\theta) \equiv 12(2\theta - 3\theta^2)$ и $\varphi'''(\theta) \equiv 24(1-3\theta)$,

такъ что $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = 0$ и $\varphi'''(0) = 24 > 0$,

а $\varphi'(1) = 0$, $\varphi''(1) = -12 < 0$,

откуда слѣдуетъ, что $\varphi(\theta)$ на участкѣ $(0; 1)$ растетъ вмѣстѣ съ θ,

при чемъ $[\varphi(\theta)]_{max.} = \varphi(1) = -(3-4) = 1$;

поэтому можемъ положить $3\theta^4 - 4\theta^3 = -\theta_i$,

гдѣ θ_i — правильная положительная дробь, и тогда получимъ, что

$$R_i = \frac{h^4}{4!}\,\frac{\theta_i}{3}\{f'''(a+h) - f'''(a-h)\}.$$

Предполагая теперь, что $f^{IV}(x)$ сохраняетъ знакъ на всемъ участкѣ (x_0, x_{2k}), т.-е. что $f'''(x)$ *на немъ либо все время растетъ, либо все время убываетъ*, имѣемъ:

$$\int_{x_0}^{x_{2k}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{i=k-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\{(y_0 + y_{2k}) +$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2k-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2k-1})\} + R,$$

при чемъ $R = -\frac{h^4}{4!}\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{i=k-1}\theta_i[f'''(x_{2i+2}) - f'''(x_{2i})] =$

$$= -\frac{h^4}{4!}\frac{\theta}{3}\sum_{i=0}^{i=k-1}[f'''(x_{2i+2}) - f'''(x_{2i})],$$

т.-е. $$\underline{R = \frac{h^4}{4!}\frac{\theta}{3}\{f'''(x_0) - f'''(x_{2k})\}} \quad \ldots\ldots\ldots (34),$$

гдѣ θ — *нѣкоторая правильная положительная дробь* (средняя между всѣми θ_i).

Эта формула на практикѣ во многихъ случаяхъ можетъ оказаться выгоднѣе выведенной въ № 60-мъ по тѣмъ же причинамъ, какія указаны въ № 58-мъ, только въ еще большей степени; при этомъ если бы $f^{IV}(x)$ на участкѣ (x_0, x_{2k}) оказалась знакоперемѣнной, то надо его предварительно разбить на такія части, на каждой изъ коихъ эта $f^{IV}(x)$ знакопостоянна.

Примѣръ. *Найти* π *съ точностью до 0,0001.*

Такъ какъ $$\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

и, полагая $$f(x) \equiv \frac{1}{x^2+1},$$

имѣемъ: $$f'''(x) \equiv \frac{24(x-x^3)}{(x^2+1)^4},\ f^{IV}(x) \equiv 24\frac{5x^4 - 10x^2 + 1}{(x^2+1)^5},$$

такъ что $f^{IV}(x)$ на участкѣ (0; 1) мѣняетъ знакъ при $x = 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$, то прежде всего пишемъ, что

$$\pi = 4\int_0^{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}} \frac{dx}{x^2+1} + 4\int_{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}^1 \frac{dx}{x^2+1},$$

и дальше поступаемъ слѣдующимъ образомъ.

Такъ какъ $$1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} = 1 - \frac{4{,}47}{5} = 1 - 0{,}9 = 0{,}1,$$

то для перваго интеграла пишемъ такое условіе:

$$\frac{0{,}1}{200000} + \frac{h^4}{4!}\frac{1}{3}\,|f'''(0) - f'''(0,1)| \leqslant \frac{1}{80000} \text{ или } \frac{h^4}{72}\frac{24\,(0,1-0{,}1^3)}{1{,}01^4} \leqslant \frac{3}{250000},$$

откуда $$h \leqslant \sqrt[4]{\frac{9}{25000}} < \sqrt[4]{\frac{1}{2500}} = \sqrt{\frac{1}{50}} < \frac{1}{7};$$

для втораго интеграла подобное условіе напишется такъ:

$$\frac{1-0{,}1}{200000} + \frac{h^4}{4!}\frac{1}{3}\,|f'''(0,1) - f'''(1)| \leqslant \frac{1}{80000} \text{ или } \frac{h^4}{72}\frac{24\,(0,1-0{,}1^3)}{1{,}01^4} \leqslant \frac{1}{125000},$$

откуда $$h \leqslant \sqrt[4]{\frac{3}{12500}} < \sqrt[4]{\frac{1}{4166{,}66\ldots}} < \sqrt{\frac{1}{64{,}55}} < \frac{1}{8{,}03}.$$

На основаніи этихъ результатовъ беремъ $h = \frac{1}{8}$ **для всего участка** $(0;\,1)$ и затѣмъ примѣняемъ формулу Симпсона сразу на всемъ его протяженіи.

Если бы поступали по способу, указанному въ № 60-мъ, то имѣли бы условіе:

$$\frac{1}{200000} + 24\,\frac{1^5}{180\,(2k)^4} \leqslant \frac{1}{40000} \text{ или } \frac{4}{30(2k)^4} \leqslant \frac{1}{50000}$$

откуда получили бы, что $2k \geqslant \sqrt[4]{\frac{20000}{3}} > \sqrt{6667} > \sqrt{81{,}64} > 9{,}03,$

такъ что пришлось бы взять $2k = 10$ и, слѣд., $h = \frac{1}{10}$.

63. Теорема Симпсона. Если въ полученномъ выше (№ 59) равенствѣ

$$\int_{a-h}^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\,[f(a-h) + 4f(a) + f(a+h)] - \frac{h^5}{90}\,\overline{(m, M)}$$

предположимъ, что *подъинтегральная функція представляетъ* **цѣлый многочленъ 3-ей степени:**

$$f(x) \equiv Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

т.-е. что *кривая* $\underline{y = f(x)}$

есть **парабола третьяго порядка,** *проходящая черезъ точки* M_1, M_0 *и*

M_2 (*черт. 11*), то

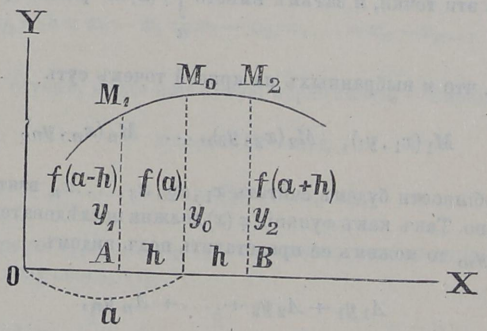
$$f^{IV}(x) \equiv 0,$$

и мы просто получаемъ слѣдующее равенство, выражающее такъ наз. **теорему Симпсона:**

$$\text{площ. } AM_1M_2B = \int_{a-h}^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_0 + y_2) \ldots (35).$$

Такъ какъ такимъ образомъ въ этомъ случаѣ формула (33) представляетъ интегралъ совершенно точно, то, слѣд., *для полученія формулы квадратуръ Симпсона надо раздѣлить участокъ* (x_0, x_{2k}) *на* $2k$ *равныхъ частей и каждый участокъ кривой* $y = f(x)$ *между двумя ординатами* **четнаго** *порядка замѣнить* **параболой третьяго порядка, проходящей черезъ вершины этихъ двухъ ординатъ и черезъ вершину промежуточной между ними.**

Черт. 11.



Теорема Симпсона легко можетъ быть получена и безъ примѣненія формулы Тейлора. Въ самомъ дѣлѣ, перенесемъ начало координатъ въ точку (a, o); ур-ніе параболы сохранитъ свой видъ и будетъ, напр., таково:

$$y = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta;$$

поэтому

$$Q = \text{площ. } AM_1 M_2 B = \int_{-h}^{h} (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\, dx =$$

$$= \Big|_{-h}^{h} \left[\frac{\alpha x^4}{4} + \frac{\beta x^3}{3} + \frac{\gamma x^2}{2} + \delta x\right] = 2\left[\frac{\beta h^3}{3} + \delta h\right] = \frac{h}{3}\left[2\beta h^2 + 6\delta\right];$$

но

$$y_1 = -\alpha h^3 + \beta h^2 - \gamma h + \delta,\ y_0 = \delta,\ y_2 = \alpha h^3 + \beta h^2 + \gamma h + \delta;$$

поэтому $$y_1 + y_2 = 2\beta h^2 + 2\delta,$$

а слѣд., $$Q = \frac{h}{3}[y_1 + y_2 + 4y_0].$$

64. Вмѣсто того, чтобы дѣлить кривую $y = f(x)$ на части и *каждую изъ нихъ* замѣнять либо прямою (какъ въ способѣ трапецій), либо параболой третьяго порядка (какъ въ формулѣ Симпсона), можно, выбравъ на кривой n точекъ, подыскать **одну** *параболу* $(n-1)$*го порядка:* $y = \varphi(x)$, которая проходила бы черезъ эти точки, и затѣмъ вмѣсто $\int_a^b f(x)\, dx$ разсматривать $\int_a^b \varphi(x)\, dx$.

Положимъ, что n выбранныхъ на кривой точекъ суть

$$M_1(x_1, y_1),\quad M_2(x_2, y_2), \ldots\quad M_n(x_n, y_n),$$

при чемъ для общности будемъ считать $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ взятыми на участкѣ (a, b) произвольно. Такъ какъ функція $\varphi(x)$ должна послѣдовательно обращаться въ $y_1, y_2, \ldots y_n$, то можемъ ее представить подъ видомъ

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots + A_n y_n,$$

гдѣ $A_1, A_2, \ldots A_n$ — цѣлые многочлены $(n-1)$-ой степени относительно x; при этомъ, напр., A_1 должно обращаться въ единицу при $x = x_1$ и въ нуль — при

$$x = x_2, x_3, \ldots x_n,$$

а слѣд., $$A_1 = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)};$$

точно такъ же $$A_2 = \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)},$$ и т. д.;

значитъ,

$$\varphi(x) \equiv \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}\,y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)}\,y_2 +$$

$$+\ldots+\frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}\,y_n \quad\ldots\ldots\ldots(36).$$

Эта формула наз. **интерполяціонной формулой Лагранжа**, такъ какъ дана этимъ ученымъ и служитъ для **интерполированія**, т.-е. для опредѣленія, по нѣсколькимъ даннымъ значеніямъ функціи, приближенныхъ величинъ ея *промежуточныхъ значеній*.

Полагая теперь для краткости:

$$I_1 = \int_a^b \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}\,dx, \ldots\ I_n = \int_a^b \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}\,dx,$$

мы для приближеннаго значенія $\int_a^b f(x)\,dx$

получаемъ сумму $S = y_1 I_1 + y_2 I_2 + \ldots + y_n I_n \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(37).$

65. Котезъ (Cotes), который первый указалъ этотъ способъ, полагалъ

$$x_1 = a,\ x_n = b \text{ и } x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n-1}.$$

Въ такомъ случаѣ, вводя еще новую перемѣнную — именно, полагая

$$x = a + (b-a)\,t,$$

откуда

$$dx = (b-a)\,dt,$$

и обозначая черезъ $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$ ея величины, отвѣчающія абсциссамъ a, $x_2 \ldots x_{n-1}$, b, получаемъ, что

$$\theta_1 = 0,\ \theta_2 = \frac{1}{n-1},\ \theta_3 = \frac{2}{n-1}, \ldots \theta_{n-1} = \frac{n-2}{n-1},\ \theta_n = 1$$

и

$$x - x_i = [a + (b-a)\,t] - [a + (b-a)\,\theta_i] = (b-a)(t-\theta_i),$$

$$x_k - x_i = [a + (b-a)\,\theta_k] - [a + (b-a)\,\theta_i] = (b-a)(\theta_k - \theta_i),$$

а слѣд.,

$$I_1 = (b-a)\int_0^1 \frac{(t-\theta_2)(t-\theta_3)\ldots(t-\theta_n)}{(\theta_1-\theta_2)(\theta_1-\theta_3)\ldots(\theta_1-\theta_n)}\,dt, \ldots I_n = (b-a)\int_0^1 \frac{(t-\theta_1)\ldots(t-\theta_{n-1})}{(\theta_n-\theta_1)\ldots(\theta_n-\theta_{n-1})}\,dt.$$

Напр., при $n = 3$, имѣемъ $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{1}{2}$, $\theta_3 = 1$

и, значитъ, $I_1 = (b-a)\int_0^1 \frac{(t-0{,}5)(t-1)}{0{,}5}\,dt = \frac{b-a}{6}$,

$I_2 = (b-a)\int_0^1 \frac{t(t-1)}{0{,}5\,(0{,}5-1)}\,dx = \frac{4}{6}(b-a)$, $I_3 = (b-a)\int_0^1 \frac{t(t-0{,}5)}{0{,}5}\,dt = \frac{b-a}{6}$,

а слѣд., $$S = \frac{b-a}{6}(y_1 + 4y_2 + y_3),$$

т.-е. получаемъ *теорему Симпсона*;

при $n = 5$, получимъ $S = \frac{b-a}{90}[7y_1 + 32y_2 + 12y_3 + 32y_4 + 7y_5]$; и т. д.

Прим. *Найти приближенное значеніе* $l2$.

Такъ какъ $$l2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x},$$

то, дѣля участокъ (0; 1) на 4 равныхъ части, при чемъ, слѣд.,

$$y_1 = 1,\ y_2 = \frac{4}{5},\ y_3 = \frac{4}{6},\ y_4 = \frac{4}{7},\ y_5 = \frac{1}{2},$$

получимъ

$$S = \frac{b-a}{90}(7y_1 + 32y_2 + 12y_3 + 32y_4 + 7y_5) = \frac{7 + 32.0{,}8 + 12.\frac{2}{3} + 32.\frac{4}{7} + 7.\frac{1}{2}}{90} =$$

$$= \frac{7 + 25{,}6 + 8 + 18{,}2857 + 3{,}5}{90} = \frac{62{,}3857}{90} = 0{,}69317.$$

Замѣчаніе. Примѣненіе интерполяціонной формулы Лагранжа хотя и даетъ результаты болѣе точные, чѣмъ пользованіе способомъ трапецій или формулой Симпсона, но невыгодно однако потому, что до сихъ поръ не найдено достаточно простое выраженіе для получаемой при этомъ ошибки.

§ 4. Опредѣленный интегралъ — какъ функція параметровъ, входящихъ въ его выраженіе.

Дифференцированіе опредѣленнаго интеграла по параметру.

66. Теорема. *Если функція* $f(x, \alpha)$ *при всякомъ* x *на участкѣ* (a, b) *имѣетъ частную производную* $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x}$, *при чемъ обѣ эти*

функціи интегрируемы на помянутомъ участкѣ, и если $f(x, \alpha)$ *непрерывна относительно* x *около* $x = a$ *и около* $x = b$,

то

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

представляетъ нѣкоторую **непрерывную** *функцію числа* α, *при чемъ у нея существуетъ производная, которая въ самомъ общемъ случаѣ — когда* a *и* b *сами зависятъ отъ* α *— опредѣляется уравненіемъ:*

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{dx}\, dx + f(b, \alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha)\frac{da}{d\alpha} \ldots (38).$$

Дѣйствительно, мы имѣемъ, вообще говоря, что

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = F(\alpha, b, a),$$

а слѣд.,

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial a}\frac{da}{d\alpha} \ldots\ldots (39).$$

Но уже было доказано, что если $f(x, \alpha)$ непрерывна относительно x около $x = a$ и около $x = b$, то

$$\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = f(b, \alpha) \text{ и } \frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = -f(a, \alpha) \quad (40);$$

слѣд., остается найти лишь производную по α, *явно входящему*, а для нея имѣемъ:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \text{Пред.}\left\{\frac{\int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx - \int_a^b f(x, \alpha)\, dx}{\Delta\alpha}\right\}_{\Delta\alpha \ldots 0} =$$

$$= \text{Пред.}\left\{\frac{\int_a^b [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\, dx}{\Delta\alpha}\right\}_{\Delta\alpha \ldots 0};$$

и такъ какъ по условію $f(x, \alpha)$ имѣетъ конечную $\frac{\partial}{\partial \alpha}$, такъ что

$$\text{Пред.} \left\{ \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} \right\}_{\Delta\alpha \ldots 0} = \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$$

и, слѣд.,
$$\frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} + \varepsilon,$$

при чемъ
$$\text{Пред.} (\varepsilon)_{\Delta\alpha \ldots 0} = 0,$$

то
$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \text{Пред.} \left\{ \int_a^b \left[\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} + \varepsilon \right] dx \right\}_{\Delta\alpha \ldots 0} =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + \text{Пред.} \left[\int_a^b \varepsilon dx \right]_{\Delta\alpha \ldots 0} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx \quad (41),$$

ибо
$$\text{Пред.} \left(\int_a^b \varepsilon dx \right)_{\Delta\alpha \ldots 0} = \text{Пред.} \left[\varepsilon_{ср} (b - a) \right]_{\Delta\alpha \ldots 0} = 0.$$

Изъ сопоставленія равенствъ (39), (40) и (41) мы и получимъ (38).

Въ частномъ случаѣ, когда a и b не зависятъ отъ α, получаемъ просто

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx,$$

т.-е. *для дифференцированія по параметру интеграла съ* **постоянными предѣлами** *можемъ дифференцировать* **подъ знакомъ интеграла.**

67. Послѣдняя теорема имѣетъ весьма важное значеніе, такъ какъ, во-первыхъ, даетъ правило дифференцированія функцій, выражаемыхъ опредѣленными интегралами, а во-вторыхъ, позволяетъ вычислять величины многихъ опредѣленныхъ интеграловъ на основаніи величинъ другихъ подобныхъ интеграловъ.

Напр., мы имѣемъ, что

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \left| \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1} \text{ при всякомъ } \alpha > 0;$$

кромѣ того, при такихъ α функція x^α непрерывна на участкѣ $(0; 1)$, также какъ и всѣ ея производныя по α, ибо

$$(x^\alpha)'_\alpha = x^\alpha lx, \ (x^\alpha)''_\alpha = x^\alpha (lx)^2, \ldots . (x^\alpha)^{(n)}_\alpha = x^\alpha (lx)^n.$$

Поэтому на основаніи послѣдней теоремы послѣдовательно получаемъ:

$$\int_0^1 x^\alpha lx dx = \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)'_\alpha = -\frac{1}{(\alpha+1)^2};$$

$$\int_0^1 x^\alpha (lx)^2 dx = \frac{1.2}{(\alpha+1)^3},$$

$$\int_0^1 x^\alpha (lx)^3 dx = -\frac{1.2.3}{(\alpha+1)^4},$$

. . . . . .

$$\int_0^1 x^\alpha (lx)^n dx = (-1)^n \frac{1.2.3\ldots n}{(\alpha+1)^{n+1}}.$$

Полагая же $\alpha = 0$, получимъ, что

$$\int_0^1 (lx)^n dx = (-1)^n 1.2.3\ldots n$$

и, слѣд.,

$$\int_0^1 lx dx = -1, \ \int_0^1 (lx)^2 dx = 1.2, \ \int_0^1 (lx)^3 dx = -1.2.3, \ldots .$$

68. Изъ предыдущей теоремы не трудно вывести и **правило дифференцированія по параметру для неопредѣленныхъ интеграловъ.** Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что

$$\int f(x,\alpha)\,dx = \int_a^x f(x,\alpha)\,dx + C(\alpha),$$

гдѣ a — постоянное число, а $C(\alpha)$ — произвольная функція числа α; отсюда

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int f(x,\alpha)\,dx = \frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^x f(x,\alpha)\,dx + C'(\alpha) = \int_a^x \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx + C_1(\alpha),$$

гдѣ $C_1(\alpha)$ — тоже произвольная функція числа α; а слѣд.,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int f(x,\alpha)\,dx = \int \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx.$$

Прим. Имѣемъ:

$$\int \cos\alpha x\,dx = \frac{\sin\alpha x}{\alpha} + C, \quad \int \sin\alpha x\,dx = -\frac{\cos\alpha x}{\alpha} + C_1;$$

слѣд.,

$$-\int x\sin\alpha x\,dx = \frac{\alpha x\cos\alpha x - \sin\alpha x}{\alpha^2} + C', \int x\cos\alpha x\,dx = \frac{\alpha x\sin\alpha x + \cos\alpha x}{\alpha^2} + C_1'.$$

. . . . . .

Повторное интегрированіе функціи одной независимой перемѣнной.

69. Положимъ, что намъ извѣстна $f^{(n)}(x)$; напр.,

$$f^{(n)}(x) \equiv \varphi(x);$$

тогда, очевидно: $f^{(n-1)}(x) = \int \varphi(x)\,dx + C_1'$,

$$f^{(n-2)}(x) = \int\left[\int \varphi(x)\,dx\right]dx + C_1' x + C_2' = \int dx \int \varphi(x)\,dx + C_1' x + C_2',$$

. . . . . .

$$f(x) = \int dx \int dx \ldots \int \varphi(x)\,dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n,$$

при чемъ число интегрированій въ послѣднемъ выраженіи равно n; короче, и вмѣстѣ съ тѣмъ яснѣе, его обозначаютъ такъ:

$$\int \varphi(x)\, dx^n$$

и называютъ **интеграломъ** *n-го* **порядка отъ функціи** $\varphi(x)$. Такимъ образомъ, если

$$f^{(n)}(x) \equiv \varphi(x),$$

то

$$f(x) \equiv \int \varphi(x)\, dx^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n,$$

гдѣ $C_1, C_2, \ldots C_n$ — произвольныя числа, такъ что *функціи, имѣющія одну и ту же производную n-го порядка, могутъ отличаться другъ отъ друга цѣлымъ многочленомъ $(n-1)$'ой степени, и только имъ.*

Прим. Если $$f'''(x) \equiv \frac{1}{x} + \sin 2x,$$

то

$$f(x) \equiv \int \left\{\frac{1}{x} + \sin 2x\right\} dx^3 = \int dx^2 \int \left(\frac{1}{x} + \sin 2x\right) dx =$$

$$= \int \left(lx - \frac{\cos 2x}{2} + C\right) dx^2 = \int dx \int \left(lx - \frac{\cos 2x}{2} + C\right) dx =$$

$$= \int \left\{x lx - x - \frac{\sin 2x}{4} + Cx + C_2\right\} dx = \frac{x^2}{4}(2lx - 3 + 2C) + \frac{\cos 2x}{8} + C_2 x + C_3 =$$

$$= \frac{x^2 lx}{2} + \frac{\cos 2x}{8} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

70. Отыскивая функцію по ея n'ой производной, можно n-кратное интегрированіе замѣнить одиночнымъ, разсуждая слѣдующимъ образомъ.

Во-первыхъ, очевидно, что вмѣсто неопредѣленныхъ интеграловъ можно ввести опредѣленные, т.-е. написать, что:

$$f(x) \equiv \int_a^x dx \int_a^x dx \int_a^x \cdots \int_a^x \varphi(x)\, dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n,$$

гдѣ число a выбрано такъ, чтобы на участкѣ (a, x) функція $\varphi(x)$ и всѣ ея послѣдовательные интегралы были непрерывны.

А во-вторыхъ, полагая

$$p = \int_a^x \varphi(x)\,dx = \int_a^x \varphi(z)\,dz,$$

имѣемъ:

$$\int_a^x dx \int_a^x \varphi(x)\,dx = \int_a^x p\,dx = \Big| px - \int_a^x x\,dp;$$

и такъ какъ $(px)_{x=a} = a\int_a^a \varphi(z)\,dz = 0$ и $dp = p'_x\,dx = \varphi(x)\,dx$,

то

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx^2 = px - \int_a^x x\varphi(x)\,dx = x\int_a^x \varphi(z)\,dz - \int_a^x z\varphi(z)\,dz =$$

$$= \int_a^x x\varphi(z)\,dz - \int_a^x z\varphi(z)\,dz = \int_a^x (x-z)\,\varphi(z)\,dz.$$

Точно такъ же, полагая $q = \int_a^x p\,dx$,

находимъ

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx^3 = \int_a^x q\,dx = \Big| qx - \int_a^x x\,dq;$$

но

$$(qx)_{x=a} = a\int_a^a p\,dx = 0$$

и

$$dq = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x (x-z)\,\varphi(z)\,dz\right]dx = \left\{[(x-z)\,\varphi(z)]_{z=x} + \int_a^x \varphi(z)\,dz\right\}dx =$$

$$= \left\{\int_a^x \varphi(z)\,dz\right\}dx = p\,dx;$$

слѣд.,

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx^3 = xq - \int_a^x xp\,dx = x\int_a^x p\,dx - \int_a^x p\,d\frac{x^2}{2} =$$

$$= x\int_a^x p\,dx - \Big|_a^x p\frac{x^2}{2} + \int_a^x \frac{x^2}{2}\,dp = x\int_a^x (x-z)\,\varphi(z)\,dz - \frac{x^2}{2}\int_a^x \varphi(z)\,dz + \int_a^x \frac{x^2}{2}\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_a^x x(x-z)\,\varphi(z)\,dz - \int_a^x \frac{x^2}{2}\,\varphi(z)\,dz + \int_a^x \frac{z^2}{2}\,\varphi(z)\,dz =$$

$$= \int_a^x \frac{2x^2 - 2xz - x^2 + z^2}{1.2}\,\varphi(z)\,dz = \int_a^x \frac{(x-z)^2}{1.2}\,\varphi(z)\,dz.$$

Отсюда по аналогіи заключаемъ, что вообще

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx^n = \int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\varphi(z)\,dz,$$

и чтобы убѣдиться въ справедливости этого равенства, продифференцируемъ правую его часть n разъ по x; обозначая ее черезъ $\psi(x)$, мы при этомъ, на основаніи № 66, получимъ:

$$\psi'(x) \equiv \left[\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\,\varphi(z)\right]_{z=x} + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\right]\varphi(z)\,dz \equiv$$

$$\equiv \int_a^x \frac{(x-z)^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}\,\varphi(z)\,dz,$$

$$\psi''(x) \equiv \left[\frac{(x-z)^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}\right]_{z=x} + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(x-z)^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}\right]\varphi(z)\,dz \equiv$$

$$\equiv \int_a^x \frac{(x-z)^{n-3}}{1.2\ldots(n-3)}\,\varphi(z)\,dz,$$

и т. д.,

$$\psi^{(n-2)}(x) \equiv \int_a^x (x-z)\,\varphi(z)\,dz,$$

$$\psi^{(n-1)}(x) \equiv [(x-z)\,\varphi(z)]_{z=x} + \int_a^x \varphi(z)\,dz \equiv \int_a^x \varphi(z)\,dz$$

и, наконецъ, $$\psi^{(n)}(x) \equiv \varphi(x).$$

Такимъ образомъ

$$f(x) \equiv \int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2..(n-1)} f^{(n)}(z)\,dz + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n.$$

Прим. Если $$f'''(x) = \frac{1}{x} + \sin 2x,$$

то

$$f(x) \equiv \int_1^x \frac{(x-z)^2}{1.2}\left(\frac{1}{z} + \sin 2z\right) dz + C'_1 x^2 + C'_2 x + C'_3 =$$

$$= \int_1^x \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{z} + \sin 2z\right) dz - \int_1^x x\,(1 + z \sin 2z)\,dz + \frac{1}{2}\int_1^x (z + z^2 \sin 2z)\,dz +$$

$$+ C'_1 x^2 + C'_2 x + C'_3 = \frac{x^2}{2}\Big|_1^x \left\{lz - \frac{\cos 2z}{2}\right\} - x\Big|_1^x \left\{z - \frac{z\cos 2z}{2} + \frac{\sin 2z}{4}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\Big|_1^x \left\{\frac{z^2}{2} - \frac{z^2\cos 2z}{2} + \frac{z\sin 2z}{2} + \frac{\cos 2z}{4}\right\} + C'_1 x^2 + C'_2 x + C'_3 =$$

$$= \frac{x^2}{2} lx - \frac{x^2\cos 2x}{4} - x^2 + \frac{x^2\cos 2x}{2} - \frac{x\sin 2x}{4} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2\cos 2x}{4} + \frac{x\sin 2x}{4} +$$

$$+ \frac{\cos 2x}{8} + C''_1 x^2 + C''_2 x + C''_3 = \frac{x^2 lx}{2} + \frac{\cos 2x}{8} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Интегрированіе полныхъ дифференціаловъ.

71. Положимъ, что имѣемъ двучленъ

$$\underline{X\,dx + Y\,dy} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (42),$$

въ которомъ X и Y суть функціи *независимыхъ* перемѣнныхъ x и y, при чемъ X имѣетъ *непрерывную* $\frac{\partial}{\partial y}$, а Y имѣетъ *непрерывную* $\frac{\partial}{\partial x}$; требуется *найти такую функцію* $U(x, y)$, *полный дифференціалъ коей равенъ двучлену* (42), *т.-е.*

$$\underline{dU = X\,dx + Y\,dy.}$$

Такъ какъ въ то же время $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$,

то, слѣд., $$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = X\,dx + Y\,dy,$$

при чемъ это равенство должно существовать *при всякихъ* dx и dy, ибо x и y — независимы и, слѣд., ихъ дифференціалы произвольны; отсюда заключаемъ, что

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (43),$$

и, слѣд., $$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x},$$

и потому $$\underline{\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (44).$$

Это равенство представляетъ такимъ образомъ условіе, **необходимое** для возможности задачи; докажемъ, что оно и **достаточно**, для чего, допустивъ его выполненіе, найдемъ функцію U на основаніи равенствъ (43). Первое изъ нихъ даетъ:

$$U = \int_a^x X\,dx + \varphi(y),$$

гдѣ a — *любое число, выбираемое лишь такъ, чтобы функціи* X и $\frac{\partial X}{\partial y}$ *были непрерывны относительно* x *на участкѣ* (a, x); поэтому,

и на основаніи № 66, имѣемъ:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_a^x X\,dx + \varphi'(y) = \int_a^x \frac{\partial X}{\partial y}\,dx + \varphi'(y)$$

или, вслѣдствіе (44) и втораго изъ (43):

$$Y = \int_a^x \frac{\partial Y}{\partial x}\,dx + \varphi'(y);$$

обозначая черезъ Y_a *значеніе* Y *при* $x = a$, получаемъ:

$$Y = Y - Y_a + \varphi'(y),$$

откуда $$\varphi'(y) = Y_a$$

и, слѣд., $$\varphi(y) = \int_b^y Y_a\,dy + C,$$

гдѣ b — *любое число, выбираемое лишь такъ, чтобы* Y_a *было непрерывно на участкѣ* (b, y). Такимъ образомъ,

$$U = \int_a^x X\,dx + \int_b^y Y_a\,dy + C \ldots\ldots\ldots (45).$$

Прим. $dU = \left(2x \sin 3y + \frac{y}{\sin x \cos x}\right) dx + (3x^2 \cos 3y + l \operatorname{tg} x)\,dy.$

Такъ какъ

$$\left(2x \sin 3y + \frac{y}{\sin x \cos x}\right)'_y = 6x \cos 3y + \frac{1}{\sin x \cos x} = (3x^2 \cos 3y + l \operatorname{tg} x)'_x,$$

то $$U = \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \left(2x \sin 3y + \frac{y}{\sin x \cos x}\right) dx + \int_0^y \frac{3\pi^2}{16} \cos 3y\,dy + C =$$

$$= \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{x} (x^2 \sin 3y + y\,l \operatorname{tg} x) + \frac{\pi^2}{16}\Big|_0^y \sin 3y + C = x^2 \sin 3y + y\,l \operatorname{tg} x + C.$$

72. Положимъ еще, что имѣемъ трехчленъ

$$\underline{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz} \ldots\ldots\ldots\ldots (46),$$

въ которомъ X, Y, Z суть функціи *независимыхъ* перемѣнныхъ x, y, z, при чемъ на совокупности участковъ (a_0, x), (b_0, y) и (c_0, z) функція X имѣетъ *непрерывныя* частныя производныя по y и по z, Y — по z и по x, а Z — по x и по y; *требуется найти функцію* $V(x, y, z)$, *полный дифференціалъ которой равняется трехчлену* (46).

Имѣя въ виду, что въ то же время

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz,$$

и что dx, dy, dz произвольны, ибо x, y, z — независимы, заключаемъ, что

$$X = \frac{\partial V}{\partial x},\quad Y = \frac{\partial V}{\partial y},\quad Z = \frac{\partial V}{\partial z};$$

и такъ какъ $\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}$,

то, значитъ, $\underline{\frac{\partial Y}{\partial z} \equiv \frac{\partial Z}{\partial y},\ \frac{\partial Z}{\partial x} \equiv \frac{\partial X}{\partial z},\ \frac{\partial X}{\partial y} \equiv \frac{\partial Y}{\partial x}} \ldots\ldots\ldots (47)$;

такимъ образомъ, эти равенства представляютъ условія, **необходимыя** для того, чтобы сумма (46) могла быть полнымъ диффференціаломъ.

Докажемъ теперь, что эти условія и **достаточны**, для чего предположимъ, что они удовлетворены; тогда изъ ур-нія $X = \frac{\partial V}{\partial x}$ получаемъ:

$$V = \int_a^x X\,dx + U(y, z)$$

и, слѣд., (см. № 66),

$$Y = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_a^x X\,dx + \frac{\partial U(y,z)}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial X}{\partial y}dx + \frac{\partial U(y,z)}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial Y}{\partial x}dx + \frac{\partial U(y,z)}{\partial y},$$

т.-е. $$Y = Y - Y_a + \frac{\partial U(y,z)}{\partial y}, \ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

гдѣ $$Y_a = Y_{\text{при } x=a};$$

точно такъ же

$$Z = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\int_a^x X\,dx + \frac{\partial U(y,z)}{\partial z} = \int_a^x \frac{\partial X}{\partial z}\,dx + \frac{\partial U(y,z)}{\partial z} = \int_a^x \frac{\partial Z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U(y,z)}{\partial z},$$

т.-е. $$Z = Z - Z_a + \frac{\partial U(y,z)}{\partial z}, \ldots\ldots\ldots\ldots (49)$$

гдѣ $$Z_a = Z_{\text{при } x=a}.$$

Изъ (48) и (49) выводимъ, что

$$\frac{\partial U(y,z)}{\partial y} = Y_a \quad \text{и} \quad \frac{\partial U(y,z)}{\partial z} = Z_a,$$

т.-е. $$dU = Y_a\,dy + Z_a\,dz;$$

и такъ какъ по условію $\frac{\partial Y}{\partial z} \equiv \frac{\partial Z}{\partial y}$ **при всякомъ** x'Ѣ,

такъ что и $$\frac{\partial Y_a}{\partial z} = \frac{\partial Z_a}{\partial y},$$

то, на основаніи предъидущаго №'а, заключаемъ, что

$$U = \int_b^y Y_a\,dy + \int_c^z Z_{ab}\,dz + C,$$

гдѣ $$Z_{ab} = Z_{\text{при } x=a,\ y=b};$$

а слѣд., $$U = \int_a^x X\,dx + \int_b^y Y_a\,dy + \int_c^z Z_{ab}\,dz + C.$$

Не трудно обобщить эту формулу на случай n независимыхъ перемѣнныхъ.

Прим. 1. Проинтегрировать сумму

$$(y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dx.$$

Такъ какъ $X=y+z$, $Y=z+x$ и $Z=x+y$,

то $$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial Z}{\partial y}=1,$$

т.-е. условія (47) удовлетворены; поэтому

$$U=\int_0^x (y+z)\,dx+\int_0^y z\,dy+\int_0^z 0.\,dz+C=(y+z)\,x+zy+C=yz+zx+xy+C.$$

Прим. 2. Для суммы

$$\left[\frac{3x^2}{x^3+5yz^2}+\frac{1}{y+2z}\right]dx+\left[\frac{5z^2}{x^3+5yz^2}-\frac{x}{(y+2z)^2}\right]dy+\left[\frac{10yz}{x^3+5yz^2}-\frac{2x}{(y+2z)^2}\right]dz$$

имѣемъ $$X=\frac{3x^2}{x^3+5yz^2}+\frac{1}{y+2z},\quad Y=\frac{5z^2}{x^3+5yz^2}-\frac{x}{(y+2z)^2},$$

$$Z=\frac{10yz}{x^3+5yz^2}-\frac{2x}{(y+2z)^2};$$

слѣд.,

$$\frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{10\,(x^3+5yz^2)\,z-50yz^3}{(x^3+5yz^2)^2}+\frac{4x}{(y+2z)^3}=\frac{10x^3z}{(x^3+5yz^2)^2}+\frac{4x}{(y+2z)^3}=\frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{-30x^2yz}{(x^3+5yz^2)^2}-\frac{2}{(y+2z)^2}=\frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{-15x^2z^2}{(x^3+5yz^2)^2}-\frac{1}{(y+2z)^2}=\frac{\partial Y}{\partial x};$$

поэтому

$$U=\int_0^x\left\{\frac{3x^2}{x^3+5yz^2}+\frac{1}{y+2z}\right\}dx+\int_1^y\frac{dy}{y}+2\int_1^z\frac{dz}{z}+C'=\frac{x}{y+2z}+l\,(x^3+5yz^2)+C.$$

73. Замѣчаніе. Если заданъ не полный дифференціалъ функціи, а лишь нѣкоторыя изъ ея частныхъ производныхъ, то функція ищется непосредственнымъ интегрированіемъ послѣднихъ.

Прим. Дано, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2+y^2\sin x\quad\text{и}\quad\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2\cos x+2y.$$

Первое изъ этихъ равенствъ даетъ:

$$u = \int (x^2 + y^2 \sin x)\, dx + \varphi(y) = \frac{x^3}{3} - y^2 \cos x + \varphi(y);$$

отсюда $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y \cos x + \varphi'(y), \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \cos x + \varphi''(y)$

и, слѣд., $$\varphi''(y) = 2y,$$

откуда $$\varphi'(y) = y^2 + C, \text{ а } \varphi(y) = \frac{y^3}{3} + Cy + C_1,$$

а потому $$u = \frac{x^3 + y^3}{3} - y^2 \cos x + Cy + C_1.$$

Двойной интегралъ. Измѣненіе въ немъ порядка интегрированія. (Интегрированіе по параметру).

74. Понятіе о немъ. Предположимъ, что функція $f(x, y)$ непрерывна относительно x на участкѣ (a, A), а относительно y — на участкѣ (b, B). Въ такомъ случаѣ $\int_a^A f(x, y)\, dx$ представляетъ конечную и вполнѣ опредѣленную функцію y'а, почему и положимъ:

$$\int_a^A f(x, y)\, dx = \varphi(y);$$

тогда

$$\Delta\varphi(y) = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y) = \int_a^A f(x, y + \Delta y)\, dx - \int_a^A f(x, y)\, dx =$$

$$= \int_a^A [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]\, dx = \int_a^A \Delta_y f \,.\, dx,$$

гдѣ положено $$f(y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta_y f;$$

слѣд., $$\Delta\varphi(y) = (\Delta_y f)_{\text{сред.}} (A - a),$$

откуда видимъ, что если Δy безк.-мало, то и $\Delta\varphi(y)$ — безк.-мало, ибо тогда по условію $\Delta_y f$ — безк.-мало; значитъ, *функція* $\varphi(y)$

непрерывна относительно y на участкѣ (b, B), а слѣд., $\int_b^B \varphi(y)\,dy$ имѣетъ конечную и вполнѣ опредѣленную величину. Его наз. **двойнымъ интеграломъ** функціи $f(x, y)$ и обозначаютъ такъ:

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\,dx.$$

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что если положимъ

$$\int_b^B f(x, y)\,dy = \omega(x),$$

то функція $\omega(x)$ непрерывна относительно x на участкѣ (a, A)

и, слѣд., $$\int_a^A \omega(x)\,dx,$$

т.-е. $$\int_a^A dx \int_b^B f(x, y)\,dy,$$

въ которомъ интегрированіе совершается *сначала по y, а потомъ по x*, имѣетъ конечную и вполнѣ опредѣленную величину.

75. Теорема. *Результатъ двойнаго интегрированія* **непрерывной** *функціи между* **постоянными** *предѣлами не зависитъ отъ порядка интегрированія.*

Дѣйствительно, положимъ

$$I = \int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\,dx, \quad J = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y)\,dy;$$

на основаніи № 66 имѣемъ: $\frac{\partial I}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\,dx =$

$$= \frac{\partial}{\partial A} \int_b^B \left\{ \int_a^A f(x, y)\,dx \right\} dy = \int_b^B \left\{ \frac{\partial}{\partial A} \int_a^A f(x, y)\,dx \right\} dy = \int_b^B f(A, y)\,dy$$

и $\frac{\partial J}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A}\int_a^A \left\{\int_b^B f(x,y)\,dy\right\} dx = \left\{\int_b^B f(x,y)\,dy\right\}_{x=A} = \int_b^B f(A,y)\,dy,$

такъ что $\frac{\partial \dot{I}}{\partial A} = \frac{\partial J}{\partial A}$ или $\frac{\partial (\dot{I} - J)}{\partial A} = 0;$

точно такъ же докажемъ, что $\frac{\partial (\dot{I} - J)}{\partial B} = 0;$

а, слѣд., разность $\dot{I} - J$ не зависитъ ни отъ A, ни отъ B.

Но полагая $A = a$, получаемъ:

$$\dot{I}_{A=a} = \int_b^B \left\{\int_a^a f(x,y)\,dx\right\} dy = \int_b^B 0\,.\,dy = 0$$

и $$J_{A=a} = \int_a^a \left\{\int_b^B f(x,y)\,dy\right\} dx = 0;$$

слѣд., $\dot{I}_{A=a} - J_{A=a} = 0$, т.-е. $(\dot{I} - J)_{A=a} = 0,$

а, значитъ, $\dot{I} - J \equiv 0$, т.-е. $\dot{I} \equiv J.$

76. Предъидущая теорема позволяетъ, какъ показалъ Гауссъ, доказать, что *всякій цѣлый многочленъ* $f_n(x)$ *имѣетъ корень.*

Пусть

$$w \equiv f_n(x) \equiv (A_0 + B_0 i)\,x^n + (A_1 + B_1 i)\,x^{n-1} + \ldots + (A_n + B_n i),$$

при чемъ всѣ числа A и B — вещественны; положимъ здѣсь

$$x = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

и сдѣлаемъ приведеніе; тогда, принимая во вниманіе, что

$$x^m = r^m(\cos m\varphi + i \sin m\varphi),$$

получимъ: $$w = u + vi.$$

гдѣ $u = [A_0 \cos n\varphi - B_0 \sin n\varphi] r^n +$

$$+ [A_1 \cos (n-1)\varphi - B_1 \sin (n-1)\varphi] r^{n-1} + \ldots,$$

а $v = [A_0 \sin n\varphi + B_0 \cos n\varphi] r^n +$

$$+ [A_1 \sin (n-1)\varphi + B_1 \cos (n-1)\varphi] r^{n-1} + \ldots.$$

Положимъ теперь $\omega(r, \varphi) \equiv \operatorname{Arctg} \frac{v}{u}$

и разсмотримъ $\int_\rho^R dr \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} d\varphi$ и $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_\rho^R \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} dr.$

Такъ какъ

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} d\varphi = \Big|_0^{2\pi} \frac{\partial \omega}{\partial r} = \left(\frac{u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r}}{u^2 + v^2} \right)_{\varphi = 2\pi} - \left(\frac{u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r}}{u^2 + v^2} \right)_{\varphi = 0},$$

а функціи u, v, $\frac{\partial v}{\partial r}$ и $\frac{\partial u}{\partial r}$ при $\varphi = 0$ и при $\varphi = 2\pi$ получаютъ, очевидно, соотвѣтственно одинаковыя значенія при всякомъ $r \neq 0$,

то, слѣд., $$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} d\varphi = 0$$

а, значитъ, и $$\int_\rho^R dr \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} d\varphi = 0.$$

Съ другой стороны

$$\int_\rho^R \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} dr = \Big|_\rho^R \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = \left(\frac{u \frac{\partial v}{\partial \varphi} - v \frac{\partial u}{\partial \varphi}}{u^2 + v^2} \right)_{r = R} - \left(\frac{u \frac{\partial v}{\partial \varphi} - v \frac{\partial u}{\partial \varphi}}{u^2 + v^2} \right)_{r = \rho};$$

въ то же время

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} \equiv n [A_0 \cos n\varphi - B_0 \sin n\varphi] r^n + (n-1) [A_1 \cos (n-1)\varphi +$$

$$- B_1 \sin (n-1)\varphi] r^{n-1} + \ldots.$$

и $\frac{\partial u}{\partial \varphi} \equiv -n[A_0 \sin n\varphi + B_0 \cos n\varphi] r^n - (n-1)[A_1 \sin (n-1)\varphi + B_1 \cos (n-1)\varphi] r^{n-1} - \ldots,$

такъ что, если положимъ:

$$u \equiv Cr^n + C_1 r^{n-1} + C_2 r^{n-2} + \ldots + C_{n-1} r + C_n$$

и $$v \equiv Dr^n + D_1 r^{n-1} + D_2 r^{n-2} + \ldots + D_{n-1} r + D_n,$$

то $\frac{\partial v}{\partial \varphi} \equiv nCr^n + (n-1) C_1 r^{n-1} + (n-2) C_2 r^{n-2} + \ldots + C_{n-1} r \equiv r \frac{\partial u}{\partial r}$

и $\frac{\partial u}{\partial \varphi} \equiv -[nDr^n + (n-1) D_1 r^{n-1} + (n-2) D_2 r^{n-2} + \ldots + D_{n-1} r] \equiv -r \frac{\partial v}{\partial r},$

а слѣд., $$\frac{u \frac{\partial v}{\partial \varphi} - v \frac{\partial u}{\partial \varphi}}{u^2 + v^2} \equiv \frac{u.r \frac{\partial u}{\partial r} + v.r \frac{\partial v}{\partial r}}{u^2 + v^2} \equiv r \cdot \frac{u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial r}}{u^2 + v^2} \equiv$$

$$\equiv \frac{r}{2(u^2 + v^2)} \frac{\partial (u^2 + v^2)}{\partial r};$$

но $u^2 + v^2 \equiv (C^2 + D^2) r^{2n} + 2(CC_1 + DD_1) r^{2n-1} + \ldots + 2(C_{n-1} C_n + D_{n-1} D_n) r + (C_n^2 + D_n^2)$

и, слѣд.,

$$\frac{\partial (u^2 + v^2)}{\partial r} \equiv 2n (C^2 + D^2) r^{2n-1} + 2(2n-1)(CC_1 + DD_1) r^{2n-2} + \ldots + 2(C_{n-1} C_n + D_{n-1} D_n),$$

а потому $$\frac{u \frac{\partial v}{\partial \varphi} - v \frac{\partial u}{\partial \varphi}}{u^2 + v^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2n (C^2 + D^2) r^{2n} + 2(2n-1)(CC_1 + DD_1) r^{2n-1} + \ldots + 2(C_{n-1} C_n + D_{n-1} D_n) r}{(C^2 + D^2) r^{2n} + 2(CC_1 + DD_1) r^{2n-1} + \ldots + 2(C_{n-1} C_n + D_{n-1} D_n) r + (C_n^2 + D_n^2)},$$

откуда заключаемъ, что

$$\text{Пред.} \left[\frac{u \frac{\partial v}{\partial \varphi} - v \frac{\partial u}{\partial \varphi}}{u^2 + v^2} \right]_{r=\infty} =$$

$$= \frac{1}{2} \text{ Пред.} \left\{ \frac{2n (C^2 + D^2) + 2(2n-1)(CC_1 + DD_1) r^{-1} + \ldots}{(C^2 + D^2) + 2(CC_1 + DD_1) r^{-1} + \ldots} \right\}_{r=\infty} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2n (C^2 + D^2)}{C^2 + D^2} = n$$

и $$\text{Пред.}\left[\frac{u\frac{\partial v}{\partial\varphi}-v\frac{\partial u}{\partial\varphi}}{u^2+v^2}\right]_{r=0}=0,$$

а, значитъ, $$\left(\frac{u\frac{\partial v}{\partial\varphi}-v\frac{\partial u}{\partial\varphi}}{u^2+v^2}\right)_{r=R}=n+\alpha_R$$

и $$\left(\frac{u\frac{\partial v}{\partial\varphi}-v\frac{\partial u}{\partial\varphi}}{u^2+v^2}\right)_{r=\rho}=\beta_\rho,$$

гдѣ $$\text{Пред.}\,(\alpha_R)_{R=\infty}=0 \quad \text{и} \quad \text{Пред.}\,(\beta_\rho)_{\rho=0}=0;$$

такимъ образомъ $$\int_\rho^R \frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\varphi}\,dr=n+\alpha_R+\beta_\rho$$

и, слѣд.,

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_\rho^R\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\varphi}\,dr=\int_0^{2\pi}(n+\alpha_R+\beta_\rho)\,d\varphi=2\pi\left[n+(\alpha_R)_{\text{ср.}}+(\beta_\rho)_{\text{ср.}}\right];$$

увеличивая по произволу R и уменьшая по произволу ρ, мы можемъ уменьшить, какъ угодно, числа $(\alpha_R)_{\text{сред.}}$ и $(\beta_\rho)_{\text{сред.}}$, т.-е. можемъ сдѣлать $n+(\alpha_R)_{\text{ср.}}+(\beta_\rho)_{\text{ср.}}\neq 0$ или, иначе говоря, можемъ добиться того, что

$$\int_\rho^R dr\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\varphi}\,d\varphi\neq\int_0^{2\pi}d\varphi\int_\rho^R\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\varphi}\,dr,$$

откуда по теоремѣ предъидущаго №-а заключаемъ, что въ разсматриваемой области значеній r и φ функція $\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\varphi}$ должна разрываться; а такъ какъ она равна, очевидно,

$$\frac{(u^2+v^2)\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(u\frac{\partial v}{\partial r}-v\frac{\partial u}{\partial r}\right)-2\left(u\frac{\partial v}{\partial r}-v\frac{\partial u}{\partial r}\right)\left(u\frac{\partial u}{\partial\varphi}+v\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)}{(u^2+v^2)^2}$$

при чемъ числитель и знаменатель этой дроби непрерывны при

всякихъ r и φ, такъ что ея разрывъ можетъ происходить лишь при обращеніи ея знаменателя—въ нуль, то, слѣд., въ разсматриваемой области перемѣнныхъ r и φ есть хоть одна такая пара ихъ значеній, при которой $u^2 + v^2 = 0$, т.-е. $u = 0$ и $v = 0$ и, слѣд., $u + vi = 0$ или, иначе говоря, $f_n(x) = 0$.

77. **Теорема.** *Если функція $f(x, y)$ непрерывна относительно x и y, то результаты двойнаго* **неопредѣленнаго** *интегрированія ея въ различномъ порядкѣ отличаются другъ отъ друга лишь суммой двухъ произвольныхъ функцій, изъ коихъ* **одна зависитъ только отъ** x, **а другая — только отъ** y.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ:

$$\int dy \int f(x, y)\, dx \equiv F(x, y), \quad \int dx \int f(x, y)\, dy \equiv \Phi(x, y),$$

такъ что $$\frac{\partial F}{\partial y} = \int f(x, y)\, dx, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x} = f(x, y)$$

и $$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \int f(x, y)\, dy, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y} = f(x, y),$$

а слѣд., $$\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x} \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y};$$

но такъ какъ по условію $f(x, y)$, т.-е. $\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x}$ — непрерывна, то

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x},$$

и, значитъ, $\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}$, т.-е. $\frac{\partial^2 (F - \Phi)}{\partial x\, \partial y} \equiv 0$.

Отсюда $\frac{\partial (F - \Phi)}{\partial x} = \omega(x)$ и $F - \Phi = \int \omega(x)\, dx + \varphi(y)$,

т.-е. $$F - \Phi = \theta(x) + \varphi(y),$$

гдѣ *функціи* $\theta(x)$ *и* $\varphi(y)$ *совершенно произвольны.*

Глава III.

§ 1. Интегралы отъ функцій, обращающихся въ безконечность.

78. **Понятіе о такихъ интегралахъ.**

Если функція $f(x)$ нигдѣ на участкѣ (x_0, X) не обращается въ безконечность, то, обозначая черезъ $x_1, x_2, \ldots x_n$ *рядъ возрастающихъ чиселъ, промежуточныхъ между* x_0 *и* X, имѣемъ, какъ теорему, что

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \text{Пред.}\left\{\int_{x_0+\varepsilon_0}^{x_1-\omega_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon_1}^{x_2-\omega_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_n+\varepsilon_n}^{X-\omega} f(x)\,dx\right\}_{\substack{\varepsilon\ldots.0\\ \omega\ldots.0}} (1),$$

ибо было доказано, что: 1) опредѣленный интегралъ конечной функціи самъ есть *непрерывная* функція своего верхняго и нижняго предѣловъ, такъ что

$$\text{Пред.}\left\{\int_{x_0+\varepsilon_0}^{x_1-\omega_1} f(x)\,dx\right\}_{\substack{\varepsilon_0\ldots.0\\ \omega_1\ldots.0}} = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx, \ldots. \text{Пред.}\left\{\int_{x_n+\varepsilon_n}^{X-\omega} f(x)\,dx\right\}_{\substack{\varepsilon_n\ldots.0\\ \omega\ldots.0}} = \int_{x_n}^{X} f(x)dx,$$

и 2) интегралъ на полномъ участкѣ равенъ суммѣ интеграловъ на всѣхъ его частяхъ.

Если же функція $f(x)$ *обращается въ* ∞ *при*

$$x = x_0,\ x = x_1, \ldots . x = x_n,\ x = X,$$

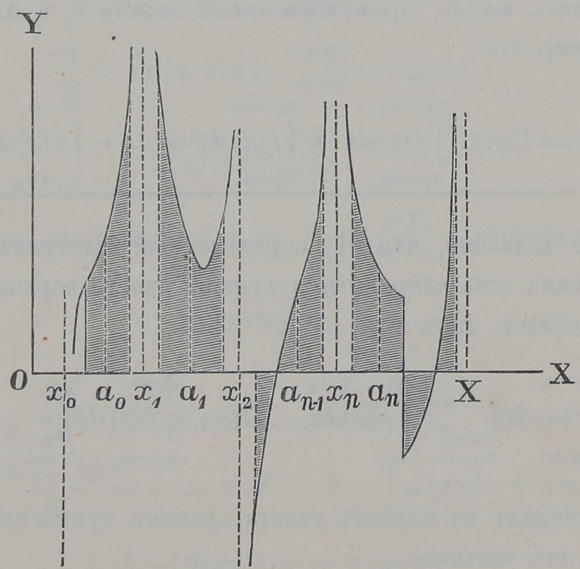
то равенство (1) принимаютъ, **какъ опредѣленіе** *для* $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$.

Если предѣлъ суммы (1) дѣйствительно существуетъ и не зависитъ отъ законовъ приближенія всѣхъ чиселъ ε *и* ω *къ нулю*, то интегралъ наз. **сходящимся**, въ противномъ же случаѣ — **расходящимся**; при этомъ если предѣлъ существуетъ, но *зависитъ отъ закона подведенія* ε *и* ω *къ нулю*, то величина, получаемая при условіи, что ε *и* ω *идутъ къ нулю, будучи всѣ равны другъ другу*, наз. (по почину Коши) **главнымъ значеніемъ** интеграла.

Условія сходимости интеграла отъ функціи, обращающейся въ ∞.

79. Прежде всего замѣтимъ, что, вводя въ каждомъ изъ ча-

Черт. 14.



стичныхъ участковъ (x_0, x_1), (x_1, x_2), ... (x_n, X) по промежуточному числу a_0, a_1, ... a_n, можемъ написать, что

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \text{Пред.}\left\{\int_{x_0}^{a_0-\varepsilon_0} f(x)\,dx + \int_{a_0}^{x_1-\omega_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon_1}^{a_1} f(x)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{a_1}^{x_2-\omega_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_n+\varepsilon_n}^{a_n} f(x)\,dx + \int_{a_n}^{X-\omega} f(x)\,dx\right\}_{\substack{\varepsilon\ldots 0\\ \omega\ldots 0}} \quad (2);$$

черт. 12 истолковываетъ это опредѣленіе геометрически.

80. **Теорема 1.** *Чтобы предыдущій интегралъ былъ сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы каждый изъ слагаемыхъ интеграловъ въ правой части равенства (2) имѣлъ опредѣленный единственный предѣлъ.*

Дѣйствительно, это условіе достаточно, ибо если оно удовлетворено, то ясно, что вся сумма (2) имѣетъ конечный и единственный предѣлъ, равный притомъ суммѣ предѣловъ всѣхъ слагаемыхъ интеграловъ.

Въ то же время оно и необходимо, ибо если бы хоть одинъ изъ слагаемыхъ интеграловъ росъ безгранично либо не имѣлъ опредѣленнаго предѣла, то то же было бы, очевидно, и со всей суммой вслѣдствіе полной независимости чиселъ ε и ω другъ отъ друга.

Эта теорема сводитъ вопросъ о сходимости интеграла функціи, обращающейся въ ∞, къ случаю, когда послѣднее обстоятельство имѣетъ мѣсто *лишь при одномъ изъ предѣловъ интеграла.*

81. **Теорема 2.** *Положимъ, что функція $f(x)$ на участкѣ (a, b) обращается въ ∞ лишь при $x = a$; тогда для сходимости*

$$\int_{a+\omega}^{b} f(x)\,dx$$

необходимо и достаточно, чтобы такъ наз. **близко-предѣльный интегралъ:**

$$\int_{a+\omega}^{a+\Omega} f(x)\,dx$$

имѣлъ предѣломъ нуль при одновременномъ подведеніи по любому закону чиселъ ω *и* Ω *къ нулю.*

Дѣйствительно, обозначая первообразную функцію черезъ $F(x)$, имѣемъ: $$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a+\varepsilon) = \varphi(\varepsilon);$$

давая числу ε рядъ значеній: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n, \ldots,$

постепенно убывающихъ до нуля, будемъ получать

$$\varphi(\varepsilon_1), \varphi(\varepsilon_2), \varphi(\varepsilon_3), \ldots \varphi(\varepsilon_n), \ldots;$$

но было доказано (№ 10), что для приближенія этихъ величинъ, при увеличеніи n до ∞, къ опредѣленному предѣлу, необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{Пред.}\,[\varphi(\varepsilon_{n+p}) - \varphi(\varepsilon_n)]_{n\ldots\infty,\, p>0} = 0,$$

т.-е. чтобы $$\text{Пред.}\,[\varphi(\omega) - \varphi(\Omega)]_{\substack{\omega\ldots 0 \\ \Omega\ldots 0}} = 0.$$

А такъ какъ

$$\varphi(\Omega) = F(b) - F(a+\Omega),\ \varphi(\omega) = F(b) - F(a+\omega),$$

такъ что $\varphi(\omega) - \varphi(\Omega) = [F(b) - F(a+\omega)] +$

$$- [F(b) - F(a+\Omega)] = F(a+\Omega) - F(a+\omega) = \int_{a+\omega}^{a+\Omega} f(x)\,dx,$$

то и видимъ, что искомое необх. и дост. условіе выражается равенствомъ:

$$\text{Пред.}\left\{\int_{a+\omega}^{a+\Omega} f(x)\,dx\right\}_{\substack{\omega\ldots 0 \\ \Omega\ldots 0}} = 0.$$

Слѣдствіе. *Чтобы интегралъ* $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, *въ которомъ* $f(x)$

обращается въ ∞ *въ нѣкоторыхъ точкахъ участка* (x_0, X), *былъ сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы всѣ близко-предѣльные интегралы, относящіеся къ этимъ точкамъ, имѣли каждый предѣломъ нуль.*

82. **Теорема 3.** *Если* $f(x)$ *при* $x = a$ *обращается въ* ∞ *n'го порядка, такъ что*

$$\text{Пред.}\,[\alpha^n f(a+\alpha)] = k \neq \begin{matrix}0\\ \infty\end{matrix},$$

то

$$\text{Пред.}\left\{\int_{a+\omega}^{a+\Omega} f(x)\,dx\right\}_{\substack{\omega\ldots 0\\ \Omega\ldots 0}} = 0$$

тогда и только тогда, *когда порядокъ этой безконечности* **меньше 1.**

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ по условію

$$\alpha^n f(a+\alpha) = k + \delta,$$

гдѣ пред. $(\delta)_{\alpha\ldots 0} = 0$, то, полагая $x = a + \alpha$, получаемъ:

$$I = \int_{a+\omega}^{a+\Omega} f(x)\,dx = \int_{\omega}^{\Omega} f(a+\alpha)\,d\alpha = \int_{\omega}^{\Omega} \alpha^n f(\alpha+\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha^n} = \int_{\omega}^{\Omega} (k+\delta)\frac{d\alpha}{\alpha^n};$$

и такъ какъ $\frac{1}{\alpha^n}$ на участкѣ (ω, Ω) сохраняетъ все время одинъ и тотъ же знакъ, то по теоремѣ № 46-го имѣемъ:

$$I = (k + \delta_{\text{ср.}}) \int_{\omega}^{\Omega} \frac{d\alpha}{\alpha^n} = (k + \delta_{\text{ср.}}) \int_{\omega}^{\Omega} \alpha^{-n}\,d\alpha.$$

Слѣд., если $n < 1$, то $I = (k + \delta_{\text{ср.}}) \dfrac{\Omega^{1-n} - \omega^{1-n}}{1-n}$;

если $n = 1$, то $I = (k + \delta_{\text{ср.}}) \int_{\omega}^{\Omega} \frac{d\alpha}{\alpha} = (k + \delta_{\text{ср.}})\, l\frac{\Omega}{\omega}$;

а если $n > 1$, то $I = \frac{k + \delta_{\text{ср.}}}{1-n}\left(\frac{1}{\Omega^{n-1}} - \frac{1}{\omega^{1-n}}\right)$,

такъ что въ первомъ случаѣ

$$\text{Пред.}\,(\dot{I})_{\substack{\omega....0\\ \Omega....0}} = 0,$$

а во второмъ и третьемъ $\dot{I}$ не имѣетъ предѣла.

Заключеніе. *Для того, чтобы опредѣленный интегралъ отъ функціи, обращающейся на участкѣ интегрированія въ ∞ различныхъ порядковъ, былъ сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы порядки всѣхъ этихъ безконечностей были* **меньше единицы.**

Прим. 1. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ — сходящійся,

ибо, полагая $x = 1 + \alpha$, имѣемъ: $\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{3}}}$,

такъ что $n = \frac{1}{3} < 1.$

Прим. 2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{x^2}$ — расходящійся,

ибо $\text{Пред.}\left[x\,\frac{\sin x}{x^2}\right]_{x....0} = \text{Пред.}\left(\frac{\sin x}{x}\right)_{x....0} = 1,$

такъ что $\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)_{x=0}$ есть безконечность 1-го порядка.

83. Можетъ случиться, что у безк. большой величины $f(a + \alpha)$ **нѣтъ порядка**, т.-е. *нѣтъ такого постояннаго числа n, которое удовлетворяло бы условію:*

$$\text{Пред.}\,[\alpha^n f(a+\alpha)]_{\alpha....0} = k \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{matrix};$$

тогда, какъ легко видѣть, можно во всякомъ случаѣ найти такое постоянное число n, что: либо 1) $\alpha^n f(a+\alpha)$ растетъ безгранично, но

$$\text{Пред.}\,[\alpha^m f(a+\alpha)]_{\alpha....0} = 0 \text{ при всякомъ } m > n;$$

либо 2) $\text{Пред.}\,[\alpha^n f(a+\alpha)]_{\alpha....0} = 0,$

но $\alpha^m f(a+\alpha)$ растетъ безгранично при всякомъ $m < n$.

Въ первомъ случаѣ мы при $n < 1$ — напр., при $n = 1 - 2k$, гдѣ $k > 0$ — имѣемъ, что

$$\dot{I} = \int_{\omega}^{\Omega} f(a + \alpha)\, d\alpha = \int_{\omega}^{\Omega} \alpha^{1-k} f(a + \alpha) \frac{d\alpha}{\alpha^{1-k}} = [\alpha^{n+k} f(a + \alpha)]_{\text{ср.}} \int_{\omega}^{\Omega} \frac{d\alpha}{\alpha^{1-k}} =$$

$$= [\alpha^{n+k} f(a + \alpha)]_{\text{ср.}} \int_{\omega}^{\Omega} \alpha^{k-1}\, d\alpha = [\alpha^{n+k} f(a + \alpha)]_{\text{ср.}} \frac{\Omega^k - \omega^k}{k},$$

такъ что $$\text{Пред.}\,(\dot{I})_{\substack{\omega \ldots 0 \\ \Omega \ldots 0}} = 0;$$

при $n = 1$ находимъ: $\dot{I} = \int_{\omega}^{\Omega} \alpha f(a + \alpha) \frac{d\alpha}{\alpha} = [\alpha f(a + \alpha)]_{\text{ср.}}\, l\, \frac{\Omega}{\omega}$;

а при $n > 1$ — напр., при $n = 1 + k$, гдѣ $k > 0$ — получаемъ

$$\dot{I} = \int_{\omega}^{\Omega} \alpha^{1+k} f(a + \alpha) \frac{d\alpha}{\alpha^{1+k}} = [\alpha^n f(a + \alpha)]_{\text{ср.}} \int_{\omega}^{\Omega} \frac{d\alpha}{\alpha^{1+k}} =$$

$$= -\frac{1}{k} [\alpha^n f(a + \alpha)]_{\text{ср.}} \left\{ \frac{1}{\Omega^k} - \frac{1}{\omega^k} \right\},$$

такъ что при $n \geqslant 1$ интегралъ $\dot{I}$ не имѣетъ предѣла при подведеніи ω и Ω къ нулю.

Во второмъ случаѣ мы при $n < 1$ — напр., при $n = 1 - k$, гдѣ $k > 0$ — получаемъ:

$$\dot{I} = \int_{\omega}^{\Omega} \alpha^{1-k} f(a + \alpha) \frac{d\alpha}{\alpha^{1-k}} = [\alpha^n f(a + \alpha]_{\text{ср.}} \int_{\omega}^{\Omega} \alpha^{k-1}\, d\alpha = [\alpha^n f(a + a)]_{\text{ср.}} \frac{\Omega^k - \omega^k}{k},$$

такъ что $$\text{Пред.}\,(\dot{I})_{\substack{\omega \ldots 0 \\ \Omega \ldots 0}} = 0;$$

при $n > 1$ — напр., при $n = 1 + 2k$, гдѣ $k > 0$ — находимъ:

$$\dot{I} = \int_{\omega}^{\Omega} \alpha^{1+k} f(a + \alpha) \frac{d\alpha}{\alpha^{1+k}} = [\alpha^{n-k} f(a + \alpha]_{\text{ср.}} \int_{\omega}^{\Omega} \frac{d\alpha}{\alpha^{1+k}} =$$

$$= -\frac{1}{k} [\alpha^{n-k} f(a + \alpha)]_{\text{ср.}} \left[\frac{1}{\Omega^k} - \frac{1}{\omega^k} \right],$$

т.-е. $\dot{I}$ не имѣетъ предѣла при приближеніи ω и Ω къ нулю;

а при $n = 1$ имѣемъ:

$$\dot{I} = \int_{\omega}^{\Omega} \alpha f(a + \alpha) \frac{d\alpha}{\alpha} = [\alpha^n f(a + \alpha)]_{\text{ср.}} \int_{\omega}^{\Omega} \frac{d\alpha}{\alpha} = [\alpha^n f(a + \alpha)]_{\text{ср.}} l \frac{\Omega}{\omega},$$

и такъ какъ первый множитель послѣдняго произведенія имѣетъ предѣломъ нуль, а второй — произволенъ и можетъ расти безгранично, то о предѣлѣ интеграла $\dot{I}$ нельзя ничего сказать.

84. Въ этомъ послѣднемъ — *неопредѣленномъ* случаѣ рѣшеніе вопроса о сходимости интеграла

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\omega} f(x)\, dx$$

основывается на изслѣдованіи величины произведенія $\alpha \left(\frac{1}{l\alpha}\right)^m f(a + \alpha)$, при чемъ заключенія будутъ аналогичны предыдущимъ; но мы на этомъ останавливаться не будемъ.

85. Свойства опредѣленныхъ интеграловъ отъ функцій, обращающихся въ ∞.

I. *Интегралъ на полномъ участкѣ равенъ суммѣ интеграловъ на всѣхъ его частяхъ.*

Дѣйствительно, если число a заключается между x_0 и X, то при $f(a) = \infty$, доказываемое предложеніе вытекаетъ изъ равенства (1)'го въ № 78-мъ, а при $f(a) \neq \infty$ — изъ равенства (2).

II. *Сумма интеграловъ $\dot{I}$ и H, взятыхъ на одномъ и томъ же участкѣ (a, b) отъ двухъ функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$, равна взятому на томъ же участкѣ интегралу суммы этихъ функцій,* ибо если точки обращенія послѣднихъ въ ∞, расположенныя по порядку ихъ возрастанія, суть $x_1, x_2, \ldots x_n$, то, по опредѣленію, имѣемъ:

$$\dot{I} = \text{Пред.} \left\{ \int_{a+\varepsilon}^{x_1-\omega_1} f(x)\, dx + \ldots + \int_{x_n+\varepsilon_n}^{b-\omega} f(x)\, dx \right\} = \text{Пред.} \left\{ \dot{I}_0 + \dot{I}_1 + \ldots + \dot{I}_n \right\},$$

$$H = \text{Пред.} \left\{ \int_{a+\varepsilon}^{x_1-\omega_1} \varphi(x)\, dx + \ldots + \int_{x_n+\varepsilon_n}^{b-\omega} \varphi(x)\, dx \right\} = \text{Пред.} \left\{ H_0 + H_1 + \ldots + H_n \right\},$$

а слѣд.,

$$\dot{I}+H=\text{Пред.}\left\{\dot{I}_0+\dot{I}_1+\ldots.+\dot{I}_n\right\}+\text{Пред.}\left\{H_0+H_1+\ldots.+H_n\right\}=$$

$$=\text{Пред.}\left\{\dot{I}_0+\dot{I}_1+\ldots.+\dot{I}_n+H_0+H_1+\ldots.+H_n\right\}=$$

$$=\text{Пред.}\left\{(\dot{I}_0+H_0)+(\dot{I}_1+H_1)+\ldots.+(\dot{I}_n+H_n\right\}=$$

$$=\text{Пред.}\left\{\int_{a+\varepsilon}^{x_1-\omega_1}[f(x)+\varphi(x)]\,dx+\ldots.+\int_{x_n+\varepsilon_n}^{b-\omega}[f(x)+\varphi(x)]\right\}dx=$$

$$=\int_a^b[f(x)+\varphi(x)]\,dx.$$

III. *Если на участкѣ* (a,b) *неопредѣленный интегралъ* $F(x)$ *функціи* $f(x)$ *представляетъ функцію* **непрерывную**, *то* $\int_a^b f(x)\,dx$ **навѣрное сходящійся и равенъ** $F(b)-F(a)$,

ибо $\int_a^b f(x)\,dx=\text{Пред.}\left\{\int_{a+\varepsilon}^{x_1-\omega_1}f(x)\,dx+\ldots.+\int_{x_n+\varepsilon_n}^{b-\omega}f(x)\,dx\right\}=$

$$=\text{Пред.}\{[F(x_1-\omega_1)-F(a+\varepsilon)]+[F(x_2-\omega_2)-F(x_1+\varepsilon_1)]+$$

$$+\ldots.+[F(b-\omega)-F(x_n+\varepsilon_n)]\}=[F(x_1)-F(a)]+$$

$$+[F(x_2)-F(x_1)]+\ldots.+[F(b)-F(x_n)]=F(b)-F(a).$$

Если же $F(x)$, *оставаясь все время конечною, разрывается въ точкахъ* $a_1, a_2, \ldots. a_m$, то, очевидно:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{a_1}f(x)\,dx+\ldots.+\int_{a_n}^b f(x)\,dx.$$

IV. *Если одинъ изъ интеграловъ* $\int_a^b pdq$ и $\int_a^b qdp$

— *сходящійся, а* **произведеніе** pq **непрерывно на участкѣ** (a, b), *то будетъ сходящимся и другой изъ этихъ интеграловъ, причемъ еще*

$$\int_a^b pdq = \Big|_a^b pq - \int_a^b qdp,$$

такъ какъ на основаніи двухъ предыдущихъ свойствъ имѣемъ, что

$$\int_a^b pdq + \int_a^b qdp = \int_a^b (pdq + qdp) = \int_a^b d(pq) = \Big|_a^b pq,$$

откуда и получаемъ предыдущее равенство.

V. *Если, полагая* $x = \varphi(t)$

имѣемъ, что $\varphi'(t)$ *при измѣненіи* x *на участкѣ* (a, b) **сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ,** *а аргументъ* t *при этомъ измѣняется на* **сплошномъ** *участкѣ* (α, β), *гдѣ, конечно,* $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

будутъ сходящимися одновременно и въ такомъ случаѣ равны другъ другу.

Дѣйствительно, положимъ

$$f[\varphi(t)]\,\varphi'(t) \equiv F(t)$$

и допустимъ, что $F(t)$ обращается въ ∞ при

$$t = \theta_1,\ t = \theta_2, \ldots . t = \theta_n,$$

коимъ отвѣчаютъ значенія $x_1, x_2, \ldots . x_n$ перемѣнной x; тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \text{Пред.}\left\{\int_{\alpha+\delta}^{\theta_1-\Omega_1} F(t)\,dt + \int_{\theta_1+\delta_1}^{\theta_2-\Omega_2} F(t)\,dt + \ldots + \int_{\theta_n+\delta_n}^{\beta-\Omega} F(t)\,dt\right\} =$$

$$= \text{Пред.}\left\{\int_{a+\varepsilon}^{x_1-\omega_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon_1}^{x_2-\omega_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_n+\varepsilon_n}^{b-\omega} f(x)\,dx\right\} = \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Замѣчаніе. Если функція $\varphi'(t)$ мѣняетъ знакъ, напр., при

$$x = a_1,\ x = a_2, \ldots . x = a_k,$$

то прежде измѣненія перемѣнной надо разбить участокъ (a, b) на части (a, a_1), (a_1, a_2), $\ldots . (a_k, b)$.

86. VI. **Дифференцированіе по параметру** *интеграла функціи, обращающейся въ* ∞ *на участкѣ интегрированія,* **нельзя,** *вообще говоря, замѣнять дифференцированіемъ подъ знакомъ интеграла.*

Напр., если $0 < \alpha < 1$, то въ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-\alpha}}$ подъинтегральная функція на участкѣ (0; 1) обращается въ ∞ при $x = \alpha$; при этомъ, такъ какъ порядокъ этой безконечности равенъ $\frac{1}{3} < 1$, то интегралъ — сходящійся, и именно онъ равенъ

$$\int_0^1 (x-\alpha)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \Big|_0^1 \frac{3}{2}(x-\alpha)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left\{(1-\alpha)^{\frac{2}{3}} - \alpha^{\frac{2}{3}}\right\};$$

эта послѣдняя функція имѣетъ, очевидно, при всякомъ α (кромѣ $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$) опредѣленную конечную производную — именно;

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{1-\alpha}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}},$$

между тѣмъ какъ

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-\alpha}}\right)dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[(x-\alpha)^{-\frac{1}{3}}\right]dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (x-\alpha)^{-\frac{4}{3}}\,dx,$$

а этотъ интегралъ — расходящійся, ибо при $x = \alpha$ его подъинтегральная функція обращается въ ∞ порядка $\frac{4}{3} > 1$.

87. Большое число случаевъ, когда дифференцированіе по параметру интеграла функціи, обращающейся въ ∞, можно замѣнять дифференцированіемъ подъ знакомъ интеграла, даетъ слѣдующая

Теорема. *Предположимъ, что функціи* $f(x, \alpha)$ *и* $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ *интегрируемы на участкѣ* $(a + \varepsilon, b)$, *какъ бы* ε *ни было мало, но* $\frac{\partial f(a, \alpha)}{\partial \alpha} = \infty$; *пусть кромѣ того*

$$\frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} - \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \omega . \varphi(x, \alpha),$$

при чемъ

$$\int_a^b | \varphi(x, \alpha) | \, dx$$

равенъ **конечному** *числу* k, *а Пред.* $(\omega)_{\Delta\alpha \ldots 0} = 0$, *каково бы ни было* x *на участкѣ* a, b); *тогда*

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b f(x, \alpha) \, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \, dx.$$

Дѣйствительно, такъ какъ по опредѣленію

$$\int_a^b f(x, \alpha) \, dx = \text{Пред.} \left\{ \int_{a+\varepsilon}^b f(x) \, dx \right\}_{\varepsilon \ldots 0},$$

то $$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b f(x, \alpha) \, dx = \text{Пред.} \left\{ \frac{1}{\Delta\alpha} \left[\int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha) \, dx - \int_a^b f(x, \alpha) \, dx \right] \right\}_{\Delta\alpha \ldots 0} =$$

$$= \text{Пред.} \left\{ \int_a^b \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} \, dx \right\}_{\Delta\alpha \ldots 0} =$$

$$= \text{Пред.} \left\{ \text{Пред.} \left[\int_{a+\varepsilon}^b \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} \, dx \right]_{\varepsilon \ldots 0} \right\}_{\Delta\alpha \ldots 0};$$

но точно такъ же $$\int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \, dx = \text{Пред.} \left\{ \int_{a+\varepsilon}^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \, dx \right\}_{\varepsilon \ldots 0};$$

поэтому $$\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx - \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx\right| =$$

$$= \left|\text{Пр.}\left\{\text{Пр.}\left[\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,dx - \text{Пр.}\left[\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx\right]_{\varepsilon\ldots0}\right\}_{\Delta\alpha\ldots0}\right. =$$

$$= \left|\text{Пред.}\left\{\text{Пред.}\left[\int_{a+\varepsilon}^{b}\left(\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha} - \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right)dx\right]_{\varepsilon\ldots0}\right\}_{\Delta\alpha\ldots0}\right| =$$

$$= \left|\text{Пр.}\left\{\text{Пр.}\left[\int_{a+\varepsilon}^{b}\omega.\varphi(x,\alpha)\,dx\right]_{\varepsilon\ldots0}\right\}_{\Delta\alpha\ldots0}\right| \leqslant \text{Пр.}\left\{\text{Пр.}\left[\int_{a+\varepsilon}^{b}|\,\omega\,|.|\,\varphi(x,\alpha)\,|\,dx\right]_{\varepsilon\ldots0}\right\}_{\Delta\alpha\ldots0} =$$

$$= \text{Пр.}\left\{\text{Пр.}\left[\,|\,\omega\,|_{\text{ср.}}\int_{a+\varepsilon}^{b}|\,\varphi(x,\alpha)\,|\,dx\right]_{\varepsilon\ldots0}\right\}_{\Delta\alpha\ldots0} = k.\,\text{Пр.}\left\{\text{Пр.}\left[\,|\,\omega\,|_{\text{ср.}}\right]_{\varepsilon\ldots0}\right\}_{\Delta\alpha\ldots0} = 0,$$

а слѣд., $$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx.$$

Слѣдствіе. *При указанныхъ въ теоремѣ условіяхъ интегралъ* $\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ *представляетъ* **непрерывную** *функцію параметра* α.

88. Примѣръ. Если $0 < \alpha < 1$, то функція $x^{-\alpha}(lx)^n$ и ея $\frac{\partial}{\partial\alpha}$, равная $-x^{-\alpha}(lx)^{n+1}$, обращаются въ безконечность при $x = 0$; но, какъ извѣстно, каково бы ни было k, имѣемъ

$$\text{Пред.}\,\{x^{\alpha+\beta}\,[x^{-\alpha}(lx)^k]\}_{x\ldots0} = \text{Пред.}\,\{x^{\beta}(lx)^k\}_{x\ldots0} = 0$$

при всякомъ положительномъ числѣ β; и такъ какъ $\alpha < 1$, то можемъ β взять такъ чтобы и $\alpha+\beta$ было < 1; значитъ, $x^{-\alpha}(lx)^k$ при $x = 0$ обращается въ ∞ ниже 1-го порядка, а слѣд., интегралъ

$$\int_0^1 x^{-\alpha}(lx)^k\,dx$$

будетъ сходящимся при всякомъ k. Съ другой стороны, полагая

$$x^{-\alpha}(lx)^n \equiv f(x,\alpha),$$

имѣемъ

$$\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}-\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}=\frac{x^{-\alpha-\Delta\alpha}(lx)^n-x^{-\alpha}(lx)^n}{\Delta\alpha}+x^{-\alpha}(lx)^{n+1}=$$

$$=x^{-\alpha}(lx)^n\left\{\frac{x^{-\Delta\alpha}-1}{\Delta\alpha}+lx\right\}=x^{-\alpha}(lx)^n\left\{\frac{e^{-\Delta\alpha.lx}-1}{\Delta\alpha}+lx\right\}=$$

$$=x^{-\alpha}(lx)^n\left\{\frac{1-\frac{\Delta\alpha.lx}{1}+\frac{e^{-\theta.\Delta\alpha lx}(\Delta\alpha lx)^2}{1.2}-1}{\Delta\alpha}+lx\right\}=\frac{1}{2}x^{-(\alpha+\theta\Delta\alpha)}(lx)^{n+2}\Delta\alpha,$$

такъ что $\omega=x^{-\theta.\Delta\alpha}\Delta\alpha$, а $\varphi(x,\alpha)\equiv\frac{1}{2}x^{-\alpha}(lx)^{n+2}$;

и такъ какъ $$\int_0^1|\varphi(x,\alpha)|\,dx=\pm\int_0^1\varphi(x,\alpha)\,dx,$$

то, какъ только что показано, $\int_0^1|\varphi(x,\alpha)|\,dx$

представляетъ величину конечную. Изъ всего этого заключаемъ, что

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^1 x^{-\alpha}(lx)^n\,dx=\int_0^1\frac{\partial}{\partial\alpha}[x^{-\alpha}(lx)^n]\,dx.$$

Поэтому, исходя изъ равенства:

$$\int_0^1 x^{-\alpha}\,dx=\left|\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_0^1=\frac{1}{1-\alpha}=(1-\alpha)^{-1},$$

мы помощью n'кратнаго дифференцированія послѣдовательно получаемъ:

$$\int_0^1 x^{-\alpha}lx\,dx=-1.(1-\alpha)^{-2},\quad\int_0^1 x^{-\alpha}(lx)^2\,dx=(-1)^2.1.2.(1-\alpha)^{-3},\text{ и т. д.,}$$

наконецъ, $$\int_0^1 x^{-\alpha}(lx)^n\,dx=(-1)^n.1.2\ldots.(n-1)\,n.(1-\alpha)^{-(n+1)};$$

подводя же α къ нулю, находимъ еще, что

$$\int_0^1 (lx)^n\,dx = (-1)^n.1.2.3....(n-1)\,n.$$

89. VII. **Измѣненіе порядка двойнаго интегрированія** *функціи, обращающейся въ полъ интегрированія въ* ∞, **можетъ измѣнить его результатъ.**

Такъ напр., $I = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{2x^2-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\,dx =$

$$= -\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{(x^2+y^2)\,dx - x.2x\,dx}{(x^2+y^2)^2} = -\int_0^1 dy \int_0^1 d_x \frac{x}{x^2+y^2} =$$

$$= -\int_0^1 \Big|_{x=0}^{x=1} \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\Big|_0^1 \operatorname{Arctg} y = -\frac{\pi}{4};$$

и точно такъ же

$$K = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = -\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = -\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4};$$

такимъ образомъ $I - K = -\frac{\pi}{2}$,

а не нулю, и объясняется это тѣмъ, что подъинтегральная функція $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ обращается въ ∞ при $x=0$, $y=0$, ибо, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, имѣемъ:

$$\left[\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = \left[\frac{r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}{r^4}\right]_{r=0} = \left[\frac{\cos 2\varphi}{r^2}\right]_{r=0} = \pm\infty.$$

90. **Зависимость между результатами двойнаго интегрированія безконечной функціи,** *совершеннаго въ одномъ и въ другомъ порядкѣ.*

Положимъ, что $f(x, y)$ при измѣненіи x на участкѣ (a, A), а y — на участкѣ

(b, B) обращается въ ∞ лишь при $x = a$, $y = b$; тогда, полагая

$$\int_a^{a+\alpha} f(x, y)\, dx = \varphi(\alpha, y),$$

такъ что $\varphi(\alpha, y)$ есть близко-предѣльный интегралъ для $\int_a^A f(x, y)\, dx$,

мы имѣемъ *по опредѣленію*, что

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\, dx = \text{Пред.} \left\{ \int_{b+\beta}^B dy \int_a^A f(x, y)\, dx \right\}_{\beta \ldots 0} =$$

$$= \text{Пред.} \left\{ \int_{b+\beta}^B dy \left[\int_a^{a+\alpha} f(x, y)\, dx + \int_{a+\alpha}^A f(x, y)\, dx \right] \right\}_{\beta \ldots 0} =$$

$$= \text{Пред.} \left\{ \int_{b+\beta}^B dy \int_a^{a+\alpha} f(x, y)\, dx \right\}_{\beta \ldots 0} + \text{Пред.} \left\{ \int_{b+\beta}^B dy \int_{a+\alpha}^A f(x, y)\, dx \right\}_{\beta \ldots 0} =$$

$$= \text{Пред.} \left\{ \int_{b+\beta}^B \varphi(\alpha, y)\, dy \right\}_{\beta \ldots 0} + \text{Пред.} \left\{ \int_b^B dy \int_{a+\alpha}^A f(x, y)\, dx - \int_b^{b+\beta} dy \int_{a+\alpha}^A f(x, y)\, dx \right\}_{\beta \ldots 0} =$$

$$= \int_b^B \varphi(\alpha, y)\, dy + \int_b^B dy \int_{a+\alpha}^A f(x, y)\, dx - \text{Пред.} \left\{ \int_b^{b+\beta} dy \int_{a+\alpha}^A f(x, y)\, dx \right\}_{\beta \ldots 0} =$$

$$= \int_b^B \varphi(\alpha, y)\, dy + \int_{a+\alpha}^A dx \int_b^B f(x, y)\, dy,$$

ибо функція $f(x, y)$ при измѣненіи x отъ $a + \alpha$ до A, а y — отъ b до B не обращается въ ∞, такъ что $\int_{a+\alpha}^A f(x, y)\, dx$

представляетъ величину конечную, а слѣд.,

$$\text{Пред.} \left\{ \int_b^{b+\beta} dy \int_{a+\alpha}^A f(x, y)\, dx \right\}_{\beta \ldots 0} = 0;$$

подводя теперь α къ нулю, получаемъ:

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x,y)\,dx = \text{Пред.}\left\{\int_b^B \varphi(\alpha,y)\,dy\right\}_{\alpha\ldots0} + \text{Пред.}\left\{\int_{a+\alpha}^A dx \int_b^B f(x,y)\,dy\right\}_{\alpha\ldots0},$$

т.-е.
$$\int_b^B dy \int_a^A f(x,y)\,dx = \int_a^A dx \int_b^B f(x,y)\,dy + \text{Пред.}\left[\int_b^B \varphi(\alpha,y)\,dy\right]_{\alpha\ldots0};$$

точно такъ же, если
$$\psi(x,\beta) = \int_b^{b+\beta} f(x,y)\,dy,$$

то
$$\int_a^A dx \int_b^B f(x,y)\,dy = \int_b^B dy \int_a^A f(x,y)\,dx + \text{Пред.}\left[\int_a^A \psi(x,\beta)\,dx\right]_{\beta\ldots0},$$

откуда между прочимъ вытекаетъ, что

$$\text{Пред.}\left\{\int_b^B \varphi(\alpha,y)\,dy\right\}_{\alpha\ldots0} = -\,\text{Пред.}\left\{\int_a^A \psi(x,\beta)\,dx\right\}_{\beta\ldots0} \ldots\ldots\ldots (*)$$

Слѣдствіе. Если не только близко-предѣльные интегралы

$$\varphi(\alpha,y) \text{ и } \psi(x,\beta), \quad \text{т.-е.} \int_a^{a+\alpha} f(x,y)\,dx \quad \text{и} \quad \int_b^{b+\beta} f(x,y)\,dy$$

имѣютъ предѣломъ нуль (при подведеніи соотвѣтственно α или β къ нулю), но *если удовлетворяется то или другое изъ слѣдующихъ условій:*

$$\text{Пред.}\left\{\int_b^B \varphi(\alpha,y)\,dy\right\}_{\alpha\ldots0} = 0 \quad \text{и} \quad \text{Пред.}\left\{\int_a^A \psi(x,\beta)\,dx\right\}_{\beta\ldots0} = 0$$

(при чемъ изъ равенства (*) слѣдуетъ, что и другое будетъ удовлетворено) **то результатъ двойнаго интегрированія не зависитъ отъ его порядка.**

Полученное общее заключеніе повѣряется легко на примѣрѣ № 89-го; въ немъ

$$\varphi(\alpha,y) = \int_0^\alpha \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \left|\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right. = -\frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}$$

и $$\psi(x, \beta) = \int_0^{\beta} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dy = \Big|_0^{\beta} \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\beta}{\beta^2 + x^2};$$

поэтому $$\int_0^1 \varphi(\alpha, y)\, dy = -\int_0^1 \frac{\alpha\, dy}{\alpha^2 + y^2} = -\Big|_0^1 \operatorname{Arctg} \frac{y}{\alpha} = -\operatorname{Arctg} \frac{1}{\alpha}$$

и $$\int_0^1 \psi(x, \beta)\, dx = \int_0^1 \frac{\beta\, dx}{\beta^2 + x^2} = \Big|_0^1 \operatorname{Arctg} \frac{x}{\beta} = \operatorname{Arctg} \frac{1}{\beta},$$

а слѣд.,

$$I - K = \text{Пред.} \left\{ -\operatorname{Arctg} \frac{1}{\alpha} \right\}_{\alpha \ldots 0} = -\text{Пред.} \left\{ \operatorname{Arctg} \frac{1}{\beta} \right\}_{\beta \ldots 0} = -\frac{\pi}{2}.$$

Глава IV.

Интегралы съ безконечными предѣлами.

§ 1. Общія теоремы о такихъ интегралахъ.

91. Понятіе объ интегралахъ съ безконечными предѣлами. Интегралы

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{A} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

мы опредѣлимъ слѣдующими равенствами:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \text{Пред.}\left\{\int_a^{A} f(x)\,dx\right\}_{A....\infty}, \qquad \int_{-\infty}^{A} f(x)\,dx = \text{Пред.}\left\{\int_{-a}^{A} f(x)\,dx\right\}_{a....\infty}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \text{Пред.}\left\{\int_{-a}^{A} f(x)\,dx\right\}_{a....\infty,\ A....\infty},$$

при чемъ будемъ предполагать, что *число конечныхъ или безконечныхъ разрывовъ функціи* $f(x)$ на соотвѣтствующемъ безконечномъ участкѣ **ограниченно.** *Если такой предѣлъ дѣйствительно существуетъ, и если его величина не зависитъ отъ закона безграничнаго возрастанія чиселъ* a, *или* A, *или ихъ обоихъ,* то

соотвѣтствующій интегралъ наз. **сходящимся**; въ противномъ же случаѣ — **расходящимся.**

Изъ интеграловъ съ безконечными предѣлами мы будемъ разсматривать лишь сходящіеся.

92. Измѣненіе перемѣнной въ интегралѣ съ безконечными предѣлами. Допустимъ, что функція $\varphi(y)$ такова (см. № 39), что, какъ бы ни были велики числа a и A, можемъ въ интегралѣ

$$\int_{-a}^{A} f(x)\,dx$$

ввести новую перемѣнную y, полагая $x = \varphi(y)$;

пусть еще при этомъ обратно $y = \theta(x)$,

такъ что
$$\int_{-a}^{A} f(x)\,dx = \int_{-\theta(a)}^{\theta(A)} f[\varphi(y)]\,\varphi'(y)\,dy.$$

Тогда, увеличивая, напр., A до ∞, получимъ:

$$\int_{-a}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\theta(a)}^{\theta(\infty)} f[\varphi(y)]\,\varphi'(y)\,dy,$$

т.-е. *при указанныхъ условіяхъ замѣна перемѣнной допустима и въ интегралѣ съ безконечными предѣлами.*

93. Приведеніе интеграла съ двумя безконечными придѣлами къ интегралу съ однимъ такимъ предѣломъ.

Теорема 1. *Если одно или оба изъ чиселъ a и A равны ∞, то*

$$\int_{-a}^{A} f(x)\,dx = -\int_{A}^{-a} f(x)\,dx.$$

Дѣйствительно, это равенство справедливо всегда при a и A конечныхъ; увеличивая же послѣднія числа (одно или оба) до ∞, убѣдимся въ справедливости его и при безконечныхъ a и A.

Теорема 2. *Интегралъ на полномъ участкѣ (съ однимъ или съ двумя безконечными предѣлами) равенъ суммѣ интеграловъ на всѣхъ составляющихъ этотъ участокъ частяхъ.*

Дѣйствительно, мы имѣемъ:

$$\int_{-a}^{A} f(x)\,dx = \int_{-a}^{\alpha_1} f(x)\,dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha_n}^{A} f(x)\,dx;$$

увеличивая здѣсь a, или A, или то и другое до ∞, мы и получимъ равенство, выражающее доказываемую теорему.

Слѣдствіе 1. Беря лишь одно промежуточное число α и увеличивая a и A до ∞, получаемъ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx;$$

полагая же въ первомъ изъ интеграловъ правой части $x = -y$, откуда $dx = -dy$, а затѣмъ замѣняя въ немъ букву y буквою x, находимъ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -\int_{\infty}^{-\alpha} f(-y)\,dy + \int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{\infty} f(-x)\,dx + \int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Такимъ образомъ *интегралъ съ двумя безконечными предѣлами можно выразить помощью интеграловъ, у которыхъ лишь одинъ верхній предѣлъ равенъ* ∞.

Слѣдствіе 2. Если напр., $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ — сходящійся,

то $$\text{Пред.}\left\{\int_A^\infty f(x)\,dx\right\}_{A=\infty} = 0,$$

ибо $$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^A f(x)\,dx + \int_A^\infty f(x)\,dx$$

и, слѣд., $$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx + \text{Пред.}\left\{\int_A^\infty f(x)\,dx\right\}_{A=\infty}.$$

94. Приведеніе интеграла любой функціи, взятаго между безконечными предѣлами, къ интегралу непрерывной функціи.

Во-первыхъ, какъ только что видѣли, можемъ разсматривать лишь

$$\int_a^\infty f(x)\,dx;$$

а во-вторыхъ, обозначая черезъ b — **положительное** *число, превышающее всѣ тѣ значенія x'a, при коихъ f (x) претерпѣваетъ конечный или безконечный разрывъ*, по теоремѣ 2-й № 93-го, имѣемъ:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^\infty f(x)\,dx;$$

и такъ какъ $$\int_a^b f(x)\,dx$$

нами уже изученъ, то остается изслѣдовать лишь $\int_b^\infty f(x)\,dx$,

т.-е. *при изученіи интеграла съ безконечнымъ предѣломъ можемъ считать, что подъинтегральная функція остается* **конечной и непрерывной** *на всемъ участкѣ интегрированія, при чемъ нижній предѣлъ интегрированія можемъ считать* **положительнымъ.**

95. Условіе сходимости интеграла $\int_b^\infty f(x)\,dx$

состоитъ въ томъ, чтобы подъинтегральная функція при $x = \infty$ *обращалась въ безк.-малую* выше *1-го порядка.*

Дѣйствительно, какъ мы видѣли только что, можемъ считать, что на участкѣ (b, ∞) функція $f(x)$ непрерывна и что $b > 0$, такъ что на всемъ этомъ участкѣ x сохраняетъ знакъ и не обращается въ нуль; поэтому, можемъ положить $x = \frac{1}{y}$, такъ какъ тогда y будетъ мѣняться на *одномъ сплошномъ* участкѣ $\left(\frac{1}{b}, 0\right)$, а x'_y *сохраняетъ всегда знакъ;* при этомъ получимъ:

$$\int_b^\infty f(x)\,dx = -\int_{\frac{1}{b}}^{0} f\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{y^2} = \int_0^{\frac{1}{b}} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{y^2}\,dy.$$

Отсюда видимъ, что если бы $f(\infty)$ не была безк.-малой, то

$$\left[\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{y^2}\right]_{y=0}$$

было бы безк.-большой выше 1-го порядка, а тогда интегралъ, какъ мы знаемъ, былъ бы расходящимся; значитъ, для сходимости его *необходимо* прежде всего, чтобы $f(\infty) =$ безк.-малой. Обозначая тогда черезъ n ея порядокъ, находимъ, что

$$\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{y^2}$$

при $y = 0$ будетъ безк.-малой $(n - 2)$'го порядка, т.-е. безк.-большой $(2 - n)$'го порядка, а мы знаемъ, что въ этомъ случаѣ для сходимости

$$\int_0^{\frac{1}{b}} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{y^2}\,dy$$

необходимо и достаточно условіе: $2 - n < 1$ или $n > 1$.

Прим. 1. $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ — расходящійся, ибо $n = 1$;

и дѣйствительно, $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \Big|_1^\infty lx = l\infty.$

Прим. 2. $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ — сходящійся, ибо $n = \frac{3}{2}$;

и дѣйствительно,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}\,dx = -2\Big|_1^\infty x^{-\frac{1}{2}} = -2\Big|_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} = 2.$$

Прим. 3.

$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ — сходящійся, ибо $\left(\frac{\cos x}{x^2}\right)_{x=\infty}$ = б.-мал. не ниже 2-го пор.

Замѣчаніе. Если $f(\infty)$ представляетъ безк.-малую, *не имѣющую порядка*, то требуются дополнительныя изслѣдованія, подобныя сдѣланнымъ въ №№ 83 — 84.

96. Свойства опредѣленныхъ интегралов съ безконечными предѣлами.

I. *Если одно или оба изъ чиселъ a и A равны* ∞, *то*

$$\int_{-a}^{A} f(x)\,dx = -\int_{A}^{-a} f(x)\,dx.$$

II. *Интегралъ на полномъ участкѣ равенъ суммѣ интеграловъ на всѣхъ его частяхъ.*

Оба эти свойства доказаны въ № 93.

III. *Интегралъ суммы функцій равенъ суммѣ ихъ интеграловъ.* Дѣйствительно, при всякихъ конечныхъ a и A имѣемъ, что

$$\int_{-a}^{A} [\varphi(x) + \psi(x)]\, dx = \int_{-a}^{A} \varphi(x)\, dx + \int_{-a}^{A} \psi(x)\, dx;$$

увеличивая же здѣсь одно или оба изъ чиселъ a и A до ∞, получимъ равенство, выражающее доказываемую теорему.

IV. *Если неопредѣленный интегралъ $F(x)$ функціи $f(x)$ самъ есть функція, непрерывная на участкѣ (a, ∞)*, то

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx = F(\infty) - F(a),$$

при чемъ, очевидно, *интегралъ будетъ навѣрно сходящимся*; въ этомъ убѣждаемся, увеличивая A до ∞ въ равенствѣ

$$\int_{a}^{A} f(x)\, dx = F(A) - F(a).$$

Напр., $\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = \Big|_{0}^{\infty} - e^{-x} = -e^{-\infty} + e^{0} = 1.$

97. Изъ первыхъ трехъ, указанныхъ въ предъидущемъ №, свойствъ вытекаетъ еще, что если $\int_{0}^{\infty} f(x)\, dx$ — сходящійся,

то $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\, dx$, *когда функція $f(x)$* — **четная**,

и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$, *когда она* **нечетная.**

Въ этомъ убѣждаемся, увеличивая a до ∞ въ теоремѣ № 41-го.

Прим. 1. $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

ибо функція e^{-x^2} — четная, а $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ — сходящійся,

такъ какъ Пред. $\left(\frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x}}\right)_{x....\infty}$ = Пред. $\left(\frac{x}{e^{x^2}}\right)_{x....\infty}$ = Пред. $\left(\frac{1}{2xe^{x^2}}\right)_{x....\infty} = 0,$

такъ что e^{-x^2} при $x....\infty$ представляетъ безк.-малую *выше 1-го порядка.*

Прим. 2. $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\sin bx dx = 0,$$

ибо, очевидно, $\int_0^\infty e^{-x^2}\sin bx dx$ — сходящійся

(такъ какъ $|\,e^{-x^2}\sin bx\,| \leqslant e^{-x^2}$), а функція $e^{x^2}\sin bx$ — нечетная.

98. Интегрированіе по частямъ.

Если хоть одинъ изъ *интеграловъ* $\int_a^\infty pdq$ *и* $\int_a^\infty qdp$ *— сходящійся, а произведеніе* pq *представляетъ функцію, непрерывную на участкѣ* (a, ∞), *то* будетъ сходящимся и другой, при чемъ

$$\int_a^\infty pdq = \Big|pq - \int_a^\infty qdp.$$

Въ этомъ убѣждаемся, увеличивая A до ∞ въ равенствѣ

$$\int_a^A p\,dq = \Big|_a^A pq - \int_a^A q\,dp.$$

Подобнымъ же образомъ обобщимъ теорему на случай, когда лишь a либо a и A растутъ безгранично.

99. **Приложеніе — нахожденіе интегралов**

$$I = \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx \quad \text{и} \quad H = \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx \quad \text{при} \quad a > 0.$$

Оба эти интеграла, очевидно, сходящіеся, ибо $\sin bx$ и $\cos bx$ не выходятъ изъ границъ $(-1, +1)$, а e^{-ax} при $x = \infty$ есть безк.-малая выше перваго порядка, такъ какъ

$$\text{Пред.}\left(\frac{e^{-ax}}{\frac{1}{x}}\right)_{x\ldots\infty} = \text{Пред.}\left(\frac{x}{e^{ax}}\right)_{x\ldots\infty} = \text{Пред.}\left(\frac{1}{ae^{ax}}\right)_{x\ldots\infty} = 0;$$

въ то же время функціи $e^{-ax}\cos bx$ и $e^{-ax}\sin bx$ непрерывны на участкѣ $(0, \infty)$.

Поэтому

$$I = \int_0^\infty e^{-ax}\,d\frac{\sin bx}{b} = \Big|_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{b} + \frac{a}{b}\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{a}{b}H,$$

а

$$H = \int_0^\infty e^{-ax}\,d\left(-\frac{\cos bx}{b}\right) = \Big|_0^\infty -e^{-ax}\frac{\cos bx}{b} - \frac{a}{b}\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b} - \frac{a}{b}I;$$

слѣд., $$H = \frac{1}{b} - \frac{a^2}{b^2}H \quad \text{или} \quad \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)H = \frac{1}{b},$$

откуда $$H = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad \text{и, значитъ,} \quad I = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

т.-е. $$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Эти интегралы важно помнить; для облегченія запоминанія обратимъ вниманіе, что $\cos bx$ — четная функція числа b, а $\sin bx$ — нечетная, почему и самъ первый интегралъ долженъ быть четною функціей этого числа, а второй— нечетною.

100. Дифференцированіе опредѣленныхъ интеграловъ съ безконечными предѣлами по параметру.

Теорема. *Если на участкѣ* (a, ∞) *функціи* $f(x, \alpha)$ *и* $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ *конечны и непрерывны, а интегралы*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^\infty \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \text{ — сходящіеся,}$$

то дифференцированіе по α *интеграла* $\int_a^\infty f(x, \alpha)\,dx$ *можно замѣнять дифференцированіемъ по* α **подъ знакомъ интеграла, тогда, и только тогда,** *когда*

$$\text{Пред.} \left\{\int_a^\infty \omega dx\right\}_{\Delta\alpha \ldots 0} = 0,$$

гдѣ $$\omega = \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} - \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}.$$

Дѣйствительно,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_a^\infty f(x, \alpha)\,dx = \text{Пред.} \left\{\frac{1}{\Delta\alpha}\int_a^\infty [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\,dx\right\}_{\Delta\alpha \ldots 0} =$$

$$= \text{Пр.} \left\{\int_a^\infty \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\,dx\right\}_{\Delta\alpha \ldots 0} = \text{Пр.} \left\{\int_a^\infty \left[\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} + \omega\right] dx\right\}_{\Delta\alpha \ldots 0} =$$

$$= \text{Пр.} \left\{\int_a^\infty \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\,dx + \int_a^\infty \omega dx\right\}_{\Delta\alpha \ldots 0} = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\,dx + \text{Пр.} \left\{\int_a^\infty \omega dx\right\}_{\Delta\alpha \ldots 0},$$

откуда и выводимъ предыдущую теорему.

101. Одинъ изъ весьма общихъ случаевъ, когда условіе

$$\text{Пред.}\left\{\int_a^\infty \omega dx\right\}_{\Delta\alpha\ldots 0} = 0$$

удовлетворяется, тотъ, когда *у функціи* $f(x, \alpha)$ *существуетъ и* $\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}$, *при чемъ* $\int_a^\infty \frac{\partial^2 f(x,\alpha)}{\partial\alpha^2} dx$ представляетъ *величину* **конечную.**

Дѣйствительно, тогда по формулѣ Тейлора имѣемъ:

$$f(x, \alpha + \Delta\alpha) = f(x, \alpha) + \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial^2 f(x, \alpha+\theta.\Delta\alpha)}{\partial\alpha^2}.\frac{\Delta\alpha^2}{1.2},$$

гдѣ θ — правильная положительная дробь; поэтому

$$\omega = \frac{\partial^2 f(x,\alpha+\theta.\Delta\alpha)}{\partial\alpha^2}.\frac{\Delta\alpha}{2},$$

а слѣд.,
$$\int_a^\infty \omega dx = \frac{\Delta\alpha}{2}\int_a^\infty \frac{\partial^2 f(x,\alpha+\theta.\Delta\alpha)}{\partial\alpha^2} dx.$$

Такъ какъ число θ *само зависитъ отъ* x, то закончить разсужденіе придется слѣдующимъ образомъ: изъ условія, что $\int_a^\infty \frac{\partial^2 f(x,\alpha)}{\partial\alpha^2} dx$ имѣетъ величину конечную, слѣдуетъ, что $\frac{\partial^2 f(x,\alpha)}{\partial\alpha^2}$ при $x = \infty$ представляетъ безк.-малую выше 1-го порядка, такъ что можемъ написать, что

$$\frac{\partial^2 f(x,\alpha)}{\partial\alpha^2} = \frac{\varphi(x,\alpha)}{x^m},$$

гдѣ $m > 1$, а $\varphi(x, \alpha)$ — конечна и непрерывна относительно x'а на всемъ участкѣ (α, ∞); поэтому

$$\frac{\partial^2 f(x,\alpha+\theta.\Delta\alpha)}{\partial\alpha^2} = \frac{\varphi(x,\alpha+\theta.\Delta\alpha)}{x^m} = \frac{\varphi(x,\alpha)+\text{б. мал.}}{x^m},$$

т.-е. и $\frac{\partial^2 f(x, \alpha + \theta.\Delta\alpha)}{\partial\alpha^2}$ при $x = \infty$ представляетъ безк.-малую выше 1-го порядка, такъ что

$$\int_a^\infty \frac{\partial^2 f(x, \alpha + \theta.\Delta\alpha)}{\partial\alpha^2} dx = K(\alpha, \Delta\alpha),$$

гдѣ K — величина конечная, а слѣд.,

$$\text{Пред.} \left\{ \int_a^\infty \omega dx \right\}_{\Delta\alpha \ldots 0} = \text{Пред.} \left\{ K(\alpha, \Delta\alpha) \cdot \frac{\Delta\alpha}{2} \right\}_{\Delta\alpha \ldots 0} = 0.$$

102. **Примѣръ. Найти** $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx,$

гдѣ n — цѣлое положительное число.

Полагая $$f(x, \alpha) \equiv x^m e^{-\alpha x},$$

имѣемъ: $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha} = -x^{m+1} e^{-\alpha x}$ и $\frac{\partial^2 f(x, \alpha)}{\partial\alpha^2} = x^{m+2} e^{-\alpha x}$;

но интегралъ $\int_0^\infty x^k e^{-\alpha x} dx$ — сходящійся при всякомъ k, ибо

$$\text{Пред.} \left[\frac{x^k e^{-\alpha x}}{\frac{1}{x}} \right]_{x \ldots \infty} = \text{Пред.} \left[\frac{x^{k+1}}{e^{\alpha x}} \right]_{x \ldots \infty} = \text{Пред.} \left[\frac{(k+1) x^k}{\alpha e^{\alpha x}} \right]_{x \ldots \infty} =$$

$$= \text{Пред.} \left[\frac{(k+1) k x^{k-1}}{\alpha^2 e^{\alpha x}} \right]_{x \ldots \infty} = \ldots = \text{Пред.} \left[\frac{(k+1)!}{\alpha^{k+1} e^{\alpha x}} \right]_{x \ldots \infty} = 0,$$

такъ что $(x^k e^{-\alpha x})_{x=\infty}$ есть безк.-малая выше 1-го порядка;

поэтому $$\int_0^\infty \frac{\partial^2 f(x, \alpha)}{\partial\alpha^2} dx$$

имѣетъ конечную величину и, слѣд.,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty x^m e^{-\alpha x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\alpha}(x^m e^{-\alpha x})\,dx \text{ при всякомъ } m.$$

А такъ какъ $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \Big|_0^\infty -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} = \alpha^{-1};$

то, дифференцируя n разъ по α, послѣдовательно получаемъ:

$$-\int_0^\infty xe^{-\alpha x}\,dx = -1\,.\,\alpha^{-2} \text{ или } \int_0^\infty xe^{-\alpha x}\,dx = 1\,.\,\alpha^{-2},$$

$$-\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x}\,dx = -1\,.\,2\,.\,\alpha^{-3} \text{ или } \int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x}\,dx = 1\,.\,2\,.\,\alpha^{-3}$$

$$-\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x}\,dx = -1\,.\,2\,.\,3\,.\,\alpha^{-4} \text{ или } \int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x}\,dx = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,\alpha^{-4},$$

и т. д.,

наконецъ, $\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\,dx = 1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,.\,n\;\alpha^{-(n+1)};$

полагая же здѣсь $\alpha = 1$, находимъ:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = 1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,.\,n.$$

---

103. Измѣненіе порядка двойнаго интегрированія между безконечными предѣлами.

Теорема 1. *Если оба предѣла одного изъ интегрированій конечны, а подъинтегральная функція непрерывна во всемъ полѣ*

интегрированія, то измѣненіе его порядка не вліяетъ на его результатъ.

Положимъ, что функція $f(x, y)$ непрерывна относительно x на участкѣ (a, ∞), а относительно y — на участкѣ (b, B), и что

$$\int_a^{\infty} f(x, y)\, dx$$

— сходящійся при всякомъ y на участкѣ (b, B), такъ что, полагая

$$\int_A^{\infty} f(x, y)\, dx = \omega(A, y),$$

имѣемъ (№ 93, слѣдствіе 2-е), что Пред. $[\omega(A, y)]_{A=\infty} = 0$.

Тогда, во-первыхъ, ясно, что $\int_b^B dy \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx$

имѣетъ конечное и вполнѣ опредѣленное значеніе; а во-вторыхъ,

$$\int_b^B dy \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_b^B dy \left[\int_a^A f(x, y)\, dx + \omega(A, y) \right] =$$

$$= \int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\, dx + \int_b^B \omega(A, y)\, dy;$$

и такъ какъ въ первомъ изъ интегралов правой части всѣ предѣлы конечны, то можемъ измѣнить порядокъ интегрированія,

т.-е. $$\int_b^B dy \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y)\, dy + (B - b) \cdot [\omega(A, y)]_{\text{ср.}}$$

увеличивая же во второй части A безгранично, получаемъ

$$\int_b^B dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_b^B f(x,y)\,dy,$$

ибо

$$\text{Пред.}\,\{[\omega(A,y)]_{\text{ср.}}\}_{A=\infty} = 0.$$

Теорема II. *Для того, чтобы величина двойнаго интеграла*

$$\int_b^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx,$$

въ которомъ $f(x,y)$ *непрерывна во всемъ полѣ интегрированія, не зависѣла отъ порядка интегрированія, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\text{Пред.}\left\{\int_b^\infty \omega(A,y)\,dy\right\}_{A=\infty} = 0.$$

Дѣйствительно, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, имѣемъ:

$$\int_b^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_b^\infty \left\{\int_a^A f(x,y)\,dx + \omega(A,y)\right\} dy =$$

$$= \int_b^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx + \int_b^\infty \omega(A,y)\,dy;$$

и такъ какъ въ первомъ интегралѣ правой части оба предѣла интегрированія по x конечны, то по I-й теоремѣ можемъ въ немъ измѣнить порядокъ, такъ что

$$\int_b^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^A dx \int_b^\infty f(x,y)\,dy + \int_b^\infty \omega(A,y)\,dy;$$

увеличивая же A до ∞, получаемъ:

$$\int_b^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_b^\infty f(x,y)\,dy + \text{Пред.} \left\{ \int_b^\infty \omega(A,y)\,dy \right\}_{A=\infty},$$

откуда и заключаемъ о справедливости теоремы.

Замѣчаніе. Если положимъ

$$\int_B^\infty f(x,y)\,dy = \Omega(x,B),$$

то *то же самое* условіе можно выразить, очевидно, и такимъ равенствомъ:

$$\text{Пред.} \left\{ \int_a^\infty \Omega(x,B)\,dx \right\}_{B=\infty} = 0.$$

104. Измѣненіе порядка интегрированія даетъ возможность находить величину многихъ опредѣленныхъ интегралов. Разсмотримъ нѣкоторые изъ нихъ.

I. **Интегралъ** $\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\,dx.$

Мы имѣли выше, что при всякомъ $a > 0$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2};$$

помножая обѣ части этого равенства на db и интегрируя по b въ предѣлахъ отъ 0 до β, получаемъ:

$$I = \int_0^\beta db \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\,dx = \int_0^\beta \frac{a\,db}{a^2+b^2} =$$

$$= \int_0^\beta \frac{d\frac{b}{a}}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \Big|_0^\beta \operatorname{Arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{Arctg} \frac{\beta}{a};$$

измѣняя же въ лѣвой части порядокъ интегрированія, находимъ, что

$$= \int_0^\infty dx \int_0^\beta e^{-ax} \cos bx\, db = \int_0^\infty e^{-ax}\, dx \int_0^\beta \cos xb\, db = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x\beta}{x}\, dx,$$

такъ что $$\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x} e^{-ax}\, dx = \operatorname{Arctg} \frac{\beta}{a};$$

подводя здѣсь a къ нулю, получаемъ:

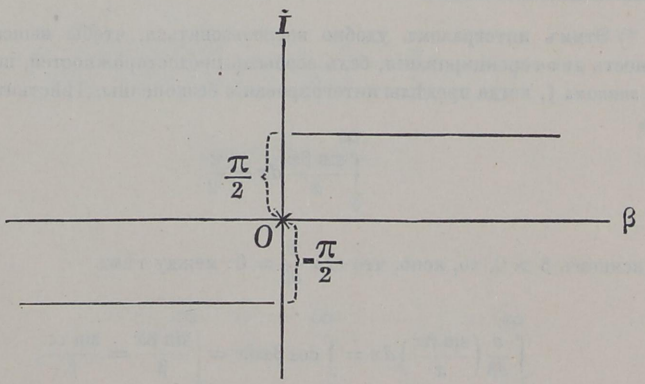
$$\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \text{ при } \beta > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\, dx = -\frac{\pi}{2} \text{ при } \beta < 0;$$

а при $\beta = 0$, очевидно, $\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\, dx = 0.$

Этотъ интегралъ: $$\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\, dx,$$

Черт. 13.



выведенный впервые Эйлеромъ, замѣчателенъ такимъ образомъ тѣмъ, что его величина зависитъ лишь отъ *знака* числа β,

но не отъ величины его, такъ что графически его зависимость отъ β изобразится двумя полупрямыми, и отдѣльной точкой (черт. 13)*).

105. II. **Интегралъ** $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$

Помноживъ равенство

$$\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

на $d\beta$ и проинтегрировавъ по β отъ m до 2, при чемъ $m > 0$, получимъ:

$$H = \int_m^2 d\beta \int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_m^2 d\beta = (2 - m)\frac{\pi}{2};$$

но измѣняя въ лѣвой части порядокъ интегрированія, имѣемъ

$$H = \int_0^\infty \frac{dx}{x}\int_m^2 \sin \beta x\, d\beta = \int_0^\infty \left\{\Big|_m^2 - \frac{\cos \beta x}{x}\right\}\frac{dx}{x} = \int_0^\infty \frac{\cos mx - \cos 2x}{x}\,\frac{dx}{x}$$

---

*) Этимъ интеграломъ удобно воспользоваться, чтобы выяснить невозможность дифференцированія, безъ особыхъ предосторожностей, по параметру *подъ знакомъ* $\int$, когда предѣлы интегрированія безконечны. Дѣйствительно, такъ какъ

$$\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

при всякомъ $\beta > 0$, то, ясно, что его $\frac{\partial}{\partial \beta} = 0$; между тѣмъ

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\sin \beta x}{x}\right)dx = \int_0^\infty \cos \beta x\, dx = \Big|_0^\infty \frac{\sin \beta x}{\beta} = \frac{\sin \infty}{\beta},$$

что равно любому числу между $-\frac{1}{\beta}$ и $+\frac{1}{\beta}$.

такъ что $$\int_0^\infty \frac{\cos mx - \cos 2x}{x^2} dx = (2-m)\frac{\pi}{2};$$

подводя же m къ нулю, находимъ:

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos 2x}{x^2} dx = 2\cdot\frac{\pi}{2}, \text{ т.-е. } \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

106. III. **Интегралъ**

$$Y = \int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx \text{ при } a > 0 \text{ и } b > 0.$$

Мы имѣемъ:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(a+b)x + \sin(a-b)x}{x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_0^\infty \frac{\sin(a+b)x}{x} dx + \int_0^\infty \frac{\sin(a-b)x}{x} dx\right\};$$

слѣд., если $a > b$, такъ что $a+b > 0$ и $a-b > 0$, то

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2};$$

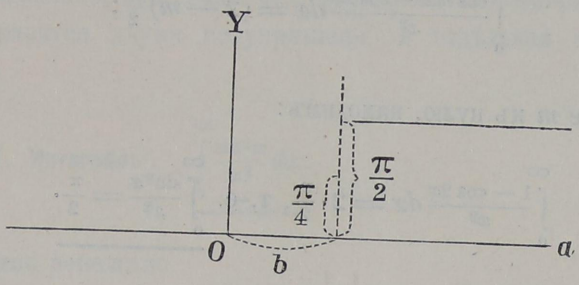
если $a = b$, то $$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx = \frac{\pi}{4};$$

а если $a < b$, то

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Ходъ этого интеграла, называемаго *разрывнымъ множителемъ* Дирихле, выражаетъ черт. 14-й.

Черт. 14.



107. IV. **Интегралъ** $\int_0^\infty \frac{\cos bx}{1+x^2}\,dx.$

Если положимъ $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x}\,dx = U(\alpha),$

гдѣ $\beta > 0$, то, имѣя въ виду, что

$$U(\alpha) = 0 \text{ при } \alpha < \beta \text{ и } U(\alpha) = \frac{\pi}{2} \text{ при } \alpha > \beta,$$

находимъ:

$$\int_0^{\beta-\varepsilon} U(\alpha) e^{-\alpha}\,d\alpha = 0, \quad \int_{\beta+\varepsilon}^\infty U(\alpha) e^{-\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}\int_{\beta+\varepsilon}^\infty e^{-\alpha}\,d\alpha =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{-e^{-\infty} + e^{-(\beta+\varepsilon)}\right\} = \frac{\pi}{2} e^{-(\beta+\varepsilon)},$$

откуда, подводя ε къ нулю и складывая оба интеграла, получаемъ:

$$V = \int_0^\infty U(\alpha) e^{-\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2} e^{-\beta}.$$

Съ другой стороны

$$V = \int_0^\infty e^{-\alpha}\,d\alpha \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x}\,dx,$$

и если положимъ $\omega(A,\alpha)=\int_A^\infty \frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}dx$,

то

$$\text{Пред.}\left\{\int_0^\infty \omega(A,\alpha)e^{-\alpha}d\alpha\right\}_{A=\infty}=\text{Пред.}\left\{\omega(A,\alpha)_{\text{ср.}}\cdot\int_0^\infty e^{-\alpha}d\alpha\right\}_{A=\infty}=$$

$$=\text{Пред.}\left\{\omega(A,\alpha)_{\text{ср.}}\cdot[-e^{-\infty}+e^{-0}]\right\}_{A=\infty}=\text{Пред.}\left\{\omega(A,\alpha)_{\text{ср.}}\right\}_{A=\infty}=0,$$

а слѣд., въ интегралѣ V можемъ измѣнить порядокъ интегрированія; при этомъ получимъ

$$V=\int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{x}dx\int_0^\infty e^{-\alpha}\sin x\alpha\,d\alpha;$$

и такъ какъ $$\int_0^\infty e^{-az}\sin bz dz=\frac{b}{a^2+b^2},$$

то, полагая здѣсь $z\equiv\alpha$, $a=1$ и $b=x$, находимъ

$$\int_0^\infty e^{-\alpha}\sin x\alpha d\alpha=\frac{x}{1+x^2},$$

а слѣд., $$V=\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{\cos\beta x}{x}dx=\int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{1+x^2}dx;$$

значитъ, $$\int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-\beta}.$$

108. V. Интегралъ

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos bx dx.$$

Помножая обѣ части равенства

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

на da и интегрируя по a отъ α до β, при чемъ $0<\alpha<\beta$, получаемъ:

$$K=\int_\alpha^\beta da\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx=\int_\alpha^\beta \frac{a\,da}{a^2+b^2}=\frac{1}{2}\Big|_{a=\alpha}^{a=\beta} l(a^2+b^2)=\frac{1}{2}\,l\,\frac{\beta^2+b^2}{\alpha^2+b^2};$$

измѣняя же въ лѣвой части порядокъ интегрированія, имѣемъ:

$$K=\int_0^\infty \cos bx\,dx\int_\alpha^\beta e^{-ax}\,dx=\int_0^\infty \cos bx\,dx\Big|_\alpha^\beta -\frac{e^{-ax}}{x}=\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos bx\,dx,$$

а слѣд., $$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos bx\,dx = l\sqrt{\frac{\beta^2+b^2}{\alpha^2+b^2}}.$$

Если здѣсь положимъ $b=0$, то еще получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\,dx = l\,\frac{\beta}{\alpha},\ \text{гдѣ}\ \beta>0\ \text{и}\ \alpha>0.$$

109. VI. **Эйлеровъ интегралъ** $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$

Такъ какъ $e^{-x^2}<\frac{1}{x^2}$ при $x>1$, такъ что $(e^{-x^2})_{x\ldots\infty}$=безк. малой выше 1-го порядка, то этотъ интегралъ — сходящійся; мы его обозначимъ черезъ p, такъ что

$$p=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Полагая $x = \alpha t$, при чемъ α и t не зависятъ другъ отъ друга,

имѣемъ: $$p = \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2} \alpha dt,$$

при чемъ изъ перваго выраженія для p слѣдуетъ, что онъ не зависитъ въ дѣйствительности отъ α; поэтому

$$\int_0^\infty p e^{-\alpha^2} d\alpha = p \int_0^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha = p \cdot p = p^2,$$

а въ то же время $$\int_0^\infty p e^{-\alpha^2} d\alpha = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2} \alpha dt \right\} e^{-\alpha^2} d\alpha =$$

$$= \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha^2} e^{-\alpha^2 t^2} \alpha dt \right\} d\alpha = \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty e^{-(1+t^2)\alpha^2} \alpha dt.$$

Положимъ теперь

$$\omega(A, \alpha) = \int_A^\infty e^{-(1+t^2)\alpha^2} \alpha dt \quad \text{и} \quad \varphi(A, \alpha) = \int_A^\infty e^{-\alpha^2 t^2} \alpha dt,$$

такъ что

$$\omega(A, \alpha) = e^{-\alpha^2} \cdot \varphi(A, \alpha), \quad \text{а} \quad \text{Пред.} [\varphi(A, \alpha)]_{A \ldots \infty} = 0,$$

ибо интегралъ p — сходящійся; тогда и

$$\text{Пред.} \left\{ \int_0^\infty \omega(A, \alpha) d\alpha \right\}_{A \ldots \infty} = \text{Пред.} \left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha^2} \varphi(A, \alpha) d\alpha \right\}_{A \ldots \infty} =$$

$$= \text{Пред.} \left\{ [\varphi(A, \alpha)]_{\text{ср.}} \int_0^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha \right\}_{A \ldots \infty} = p \cdot \text{Пред.} \left\{ \varphi(A, \alpha) \right\}_{A \ldots \infty} = 0,$$

а слѣд., въ двойномъ интегралѣ можемъ измѣнить порядокъ ин-

тегрированія, что даетъ:

$$p^2 = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-(1+t^2)\alpha^2}\, \alpha d\alpha = \int_0^\infty \left\{ \left| -\frac{e^{-(1+t^2)\alpha^2}}{2(1+t^2)} \right\} dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4},$$

откуда $$p = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Слѣдствіе. Полагая здѣсь $x = \frac{z}{h}$, получаемъ

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{h^2}}\, dz = \frac{h}{2}\sqrt{\pi};$$

этотъ интегралъ имѣетъ большое примѣненіе въ *теоріи вѣроятностей*.

110. VII. **Интегралъ** $\int_0^\infty z^{2n}\, e^{-az^2}\, dz.$

Полагая $x = kz$ въ равенствѣ: $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

получаемъ: $$\int_0^\infty e^{-k^2z^2}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2k} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, k^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*).$$

Если положимъ $f(z, k) \equiv z^{2m}\, e^{-k^2z^2}$,

то $\frac{\partial f}{\partial k} = -2kz^{2m+2}\, e^{-k^2z^2}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial k^2} = 4k^2\, z^{2m+4}\, e^{-k^2z^2}$,

такъ что $\int_0^\infty \frac{\partial^2 f}{\partial k^2}\, dz$ — сходящійся,

т.-е. представляетъ величину конечную; а слѣд.,

$$\frac{\partial}{\partial k}\int_0^\infty f(z,k)\,dz = \int_0^\infty \frac{\partial f(z,k)}{\partial z}dz.$$

Дифференцируя на этомъ основаніи равенство (*) n разъ по k, послѣдовательно получаемъ:

$$-2k\int_0^\infty z^2 e^{-k^2z^2}dz = -1\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}k^{-2} \qquad \text{или} \qquad \int_0^\infty z^2 e^{-k^2z^2}dz = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}k^{-3},$$

$$-2k\int_0^\infty z^4 e^{-k^2z^2}dz = -3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}k^{-4} \text{ или } \int_0^\infty z^4 e^{-k^2z^2}dz = \frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}k^{-5},$$

и т. д.;

наконецъ, $$\int_0^\infty z^{2n} e^{-k^2z^2}dz = \frac{1.3.5....(2n-1)}{2^n}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}k^{-(2n+1)},$$

что при $k^2 = a$ даетъ:

$$\int_0^\infty z^{2n} e^{-az^2}dz = \frac{1.3.5....(2n-1)}{2^n}\frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-\frac{2n+1}{2}}.$$

111. Интегрированіе помощью рядовъ.

Точное выраженіе опредѣленнаго интеграла можно еще иногда найти, разлагая подъинтегральную функцію въ рядъ и интегрируя послѣдній почленно.

Прим. Найти $\int_0^\infty e^{-az^2}\cos 2bz\,dz$ при $a > 0$.

Такъ какъ $$\cos 2bz = 1 - \frac{(2bz)^2}{2!} + \frac{(2bz)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{(2bz)^{2n}}{(2n)!} + R_n,$$

при чемъ $$R_n = (-1)^{n+1}\frac{(2bz)^{2n+2}\cos 2b\theta z}{(2n+2)!}, \text{ гдѣ } 0 < \theta < 1,$$

то $$K=\int_0^\infty e^{-az^2}\cos 2bz\,dz=\int_0^\infty\left\{1-\frac{(2bz)^2}{2!}+\frac{(2bz)^4}{4!}-\ldots.+\right.$$

$$\left.+(-1)^n\frac{(2bz)^{2n}}{(2n)!}+R_n\right\}e^{-az^2}\,dz$$

или, на основаніи предыдущаго №-а:

$$K=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{a^{-\frac{1}{2}}-\frac{(2b)^2}{2!}\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}+\frac{(2b)^4}{4!}\frac{1.3}{2^2}a^{-\frac{5}{2}}+\ldots.+\right.$$

$$\left.+(-1)^n\frac{(2b)^{2n}}{(2n)!}\frac{1.3\ldots.(2n-1)}{2^n}a^{-\frac{2n+1}{2}}\right\}+\int_0^\infty R_n\,e^{-az^2}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{a}\left\{1-\left(\frac{b^2}{a}\right)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{b^2}{a}\right)^2-\ldots.+\frac{(-1)^n}{1.2\ldots.n}\left(\frac{b^2}{a}\right)^n\right\}+\int_0^\infty R_n\,e^{-az^2}\,dz.$$

Но $$\left|\int_0^\infty R_n\,e^{-az^2}\,dz\right|<\frac{(2b)^{2n+2}}{(2n+2)!}\int_0^\infty z^{2n+2}\,e^{-az^2}\,dz=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{a}\cdot\frac{\left(\frac{b^2}{a}\right)^{n+1}}{(n+1)!}$$

и, слѣд., $$\text{Пред.}\left\{\int_0^\infty R_n\,e^{-az^2}\,dz\right\}_{n=\infty}=0,$$

а потому, увеличивая n до ∞, получаемъ:

$$K=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{a}\left\{1-\frac{b^2}{a}+\frac{1}{2!}\left(\frac{b^2}{a}\right)^2-\ldots.+\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{b^2}{a}\right)^n+\ldots.\right\}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\frac{b^2}{a}}.$$

112. Интегрированіе помощью составленія дифференціальнаго ур-нія.

Есть еще одинъ способъ нахожденія величины опредѣленныхъ интеграловъ. Онъ состоитъ въ томъ, что помощью дифференцированія *искомаго* интеграла I по параметру, а затѣмъ интегрированія по частямъ, составляемъ дифференціальное ур-ніе, которому удовлетворяетъ I, и это ур-ніе интегрируемъ.

Прим. *Найти интегралъ* $I=\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos 2bx\,dx$, *при* $a>0$.

Во-первыхъ, онъ, очевидно, сходящійся, ибо $|e^{-x^2}\cos bx| < e^{-x^2}$.

Во-вторыхъ, полагая $f(x,b) \equiv e^{-ax^2}\cos 2bx$,

получаемъ: $\frac{\partial f}{\partial b} = -2xe^{-ax^2}\sin 2bx$, $\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = -4x^2 e^{-ax^2}\cos bx$,

откуда заключаемъ, что и интегралы $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial b}dx$ и $\int_0^\infty \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}dx$ — сходящіеся,

такъ что можемъ дифференцировать $\dot{I}$ по b *подъ знакомъ интеграла.*

Такимъ образомъ получаемъ: $\frac{\partial \dot{I}}{\partial b} = -\int_0^\infty 2xe^{-ax^2}\sin 2bx dx =$

$$= \int_0^\infty \sin 2bx\, d\left(\frac{e^{-ax^2}}{a}\right) = \left|\frac{\sin 2bx\, e^{-ax^2}}{a}\right|_0^\infty - \frac{2b}{a}\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos 2bx\, dx = -\frac{2b}{a}\dot{I}.$$

Отсюда $$\frac{\frac{\partial \dot{I}}{\partial b}db}{\dot{I}} = -\frac{1}{a}2bdb$$

и, слѣд., $$\int_{\dot{I}_0}^{\dot{I}} \frac{d\dot{I}}{\dot{I}} = -\frac{1}{a}\int_0^b 2bdb = -\frac{b^2}{a},$$

т.-е. $$l\dot{I} - l\dot{I}_0 = -\frac{b^2}{a} \quad \text{или} \quad l\frac{\dot{I}}{\dot{I}_0} = -\frac{b^2}{a}$$

и, значитъ, $$\dot{I} = \dot{I}_0 . e^{-\frac{b^2}{a}};$$

а такъ какъ $$\dot{I}_0 = (\dot{I})_{b=0} = \int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{a},$$

то окончательно получаемъ:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos 2bx dx = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\frac{b^2}{a}}.$$

§ 2. Эйлеровы интегралы перваго и второго вида.

113. Эйлеровыми интегралами 1-го и 2-го вида *Лагранжъ назвалъ интегралы*

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx;$$

первый изъ нихъ еще называется функціей бета отъ p и q, а второй функціей гама отъ n, такъ что

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \quad \Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx.$$

Условія сходимости интеграловъ $B(p,q)$ и $\Gamma(n)$.

114. Въ интегралѣ $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$

функція $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ остается конечной и непрерывной на всемъ участкѣ $(0;\ 1)$, если только числа $p-1$ и $q-1$ оба $\geqslant 0$; если же $p-1<0$, т.-е. $1-p>0$, то, написавъ ее такъ: $\left(\frac{1}{x}\right)^{1-p}(1-x)^{q-1}$, видимъ, что она при $x=0$ обращается въ ∞, порядокъ коей равенъ $1-p$; точно такъ же, если $q-1<0$, т.-е. $1-q>0$, то, написавъ эту функцію такъ: $x^{p-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{1-q}$, видимъ, что она при $x=1$ обращается въ ∞, порядокъ коей равенъ $1-q$; отсюда заключаемъ, что для сходимости $B(p,q)$ необходимы и достаточны условія:

$$1-p<1 \text{ и } 1-q<1,$$

т.-е.

$$p>0 \text{ и } q>0.$$

115. Для $\Gamma(n)$ мы имѣемъ, что

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx = \int_0^1 x^{n-1} e^{-x}\, dx + \int_1^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx.$$

Во второмъ изъ двухъ послѣднихъ интеграловъ подъинтегральная функція $x^{n-1} e^{-x}$ непрерывна на всемъ участкѣ $(1, \infty)$, а въ то же время $(x^{n-1} e^{-x})_{x....\infty} =$ б.-малой выше 1-го порядка, ибо

$$\text{Пред.} \left(\frac{x^{n-1} e^{-x}}{\frac{1}{x}} \right)_{x....\infty} = \text{Пред.} \left(\frac{x^n}{e^x} \right)_{x....\infty} = \text{Пред.} \left(\frac{n x^{n-1}}{e^x} \right)_{x....\infty} =$$

$$= \text{Пред.} \left(\frac{n(n-1) x^{n-2}}{e^x} \right)_{x....\infty} = \text{Пред.} \left(\frac{n!}{e^x} \right)_{x....\infty} = 0;$$

слѣд., этотъ интегралъ — всегда сходящійся.

Съ другой стороны въ $\int_0^1 x^{n-1} e^{-x}\, dx$

подъинтегральная функція все время конечна и непрерывна, если $n - 1 \geqslant 0$; если же $n - 1 < 0$, т.-е. $1 - n > 0$, то, написавъ ее такъ: $\left(\frac{1}{x}\right)^{1-n} e^{-x}$, видимъ, что она при $x = 0$ обращается въ ∞, порядокъ коей равенъ $1 - n$; значитъ, для сходимости этого интеграла, а слѣд., и самой функціи $\Gamma(n)$, необходимо и достаточно условіе: $1 - n < 1$ или $\underline{n > 0}$.

Замѣтимъ между прочимъ, что

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \Big|_0^\infty - e^{-x},$$

т.-е.

$$\underline{\Gamma(1) = 1.}$$

Главнѣйшія свойства функціи $B(p, q)$.

116. I. Произведеніе $x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ представляетъ собою частный случай *дифференціальнаго бинома* $x^m(a+bx^n)^{p_1}$ — именно, когда «показатель n внутри скобокъ» равенъ 1; а такъ какъ такой биномъ, какъ мы знаемъ, интегрируется въ конечномъ видѣ когда: либо 1) p_1 — цѣлое, либо 2) $\frac{m+1}{n}$ — цѣлое, либо 3) $\frac{m+1}{n}+p_1$ — цѣлое, то слѣд., $B(p, q)$ *сможемъ выразить въ конечномъ видѣ, когда одно изъ чиселъ* q, p *или* $p+q$ — *цѣлое;* при этомъ въ первомъ случаѣ надо раскрыть скобки въ степени двучлена, во второмъ — положить $1-x=z$, а въ третьемъ — вынести x за скобки въ двучленѣ $(1-x)$.

Прим. 1. $$B\left(\frac{1}{2}, 3\right)=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^2\,dx=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-2x+x^2)\,dx=$$

$$=\int_0^1 (x^{-\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}})\,dx=\left|\left(2x^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\right|_0^1=2-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}=\frac{16}{15}.$$

Прим. 2. $$B\left(2, \frac{1}{3}\right)=\int_0^1 x(1-x)^{-\frac{2}{3}}dx;$$

полагая $1-x=z$, получаемъ: $$B\left(2, \frac{1}{3}\right)=-\int_1^0 (1-z)z^{-\frac{2}{3}}dz=$$

$$=\int_0^1 (z^{-\frac{2}{3}}-z^{\frac{1}{3}})\,dz=\left|\left(3z^{\frac{1}{3}}-\frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}}\right)\right|_0^1=3-\frac{3}{4}=2\frac{1}{4}.$$

Прим. 3. $$B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}dx=\int_0^1 x\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{3}{2}}dx;$$

полагая же здѣсь $\frac{1}{x}-1=z^2$, получаемъ: $x=\frac{1}{z^2+1}$ и $dx=-\frac{2zdz}{(z^2+1)^2}$,

а слѣд., $$B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = -\int_{\infty}^{0} \frac{1}{z^2+1} \cdot z^3 \cdot \frac{2zdz}{(z^2+1)^2} = \int_{0}^{\infty} z^3 \frac{2zdz}{(z^2+1)^3} =$$

$$= \int_{0}^{\infty} z^3 d\left[-\frac{1}{2(z^2+1)^2}\right] = -\left|\frac{z^3}{2(z^2+1)^2}\right|_{0}^{\infty} + \frac{3}{2}\int_{0}^{\infty} \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^2} = \frac{3}{4}\int_{0}^{\infty} z \frac{2zdz}{(z^2+1)^2} =$$

$$= \frac{3}{4}\int_{0}^{\infty} zd\frac{-1}{z^2+1} = -\frac{3}{4}\left|\frac{z}{z^2+1}\right|_{0}^{\infty} + \frac{3}{4}\int_{0}^{\infty} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{3}{4}\left|\operatorname{Arctg} z\right|_{0}^{\infty} = \frac{3}{8}\pi.$$

117. II. $$B(p, q) = \int_{0}^{\infty} \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz.$$

Такъ какъ въ $\int_{0}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ число x мѣняется между 0 и 1, то $1 - x \gtrless \begin{matrix}0\\1\end{matrix}$; положивъ поэтому

$$1 - x = \frac{1}{1+z},$$

имѣемъ: $$dx = \frac{dz}{(1+z)^2}, \quad x = \frac{z}{1+z},$$

а слѣд., $$B(p, q) = \int_{0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^{p-1} \left(\frac{1}{1+z}\right)^{q-1} \frac{dz}{(1+z)^2} = \int_{0}^{\infty} \frac{z^{p-1}\,dz}{(1+z)^{p+q}}.$$

118. III. $$B(p, q) = \int_{0}^{1} \frac{x^{p-1} + x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx.$$

Предыдущее равенство даетъ:

$$B(p, q) = \int_{0}^{1} \frac{z^{p-1}\,dz}{(1+z)^{p+q}} + \int_{1}^{\infty} \frac{z^{p-1}\,dz}{(1+z)^{p+q}},$$

полагая въ послѣднемъ интегралѣ $z = \frac{1}{y}$, получаемъ:

$$B(p,q) = \int_0^1 \frac{z^{p-1}\,dz}{(1+z)^{p+q}} - \int_1^0 \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^{p-1}\frac{dy}{y^2}}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{p+q}} = \int_0^1 \frac{z^{p-1}\,dz}{(1+z)^{p+q}} + \int_0^1 \frac{y^{q-1}\,dy}{(1+y)^{p+q}};$$

замѣна же, наконецъ, буквъ z и y буквою x даетъ:

$$B(p,q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx.$$

Слѣдствіе. *Функція* $B(p,q)$ *симметрична относительно чиселъ* p *и* q,

т.-е. $$\underline{B(p,q) = B(q,p).}$$

Лемма — разложеніе $\frac{1}{\sin z}$ на частныя дроби.

По формулѣ Моавра имѣемъ:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{2n} = \cos 2n\alpha + i\sin 2n\alpha$$

или, на основаніи бинома Ньютона:

$$\cos 2n\alpha + i\sin 2n\alpha = \cos^{2n}\alpha + C_{2n}^1\cos^{2n-1}\alpha\ (i\sin\alpha) +$$

$$+ C_{2n}^2\cos^{2n-2}\alpha\ (i\sin\alpha)^2 + C_{2n}^3\cos^{2n-3}\alpha\ (i\sin\alpha)^3 + \ldots.$$

$$= \{\cos^{2n}\alpha - C_{2n}^2\cos^{2n-2}\alpha\sin^2\alpha + C_{2n}^4\cos^{2n-4}\alpha\sin^4\alpha + \ldots.\} +$$

$$+ i\{C_{2n}^1\cos^{2n-1}\alpha\sin\alpha - C_{2n}^3\cos^{2n-3}\alpha\sin^3\alpha + \ldots.\},$$

а слѣд., $\sin 2n\alpha = C_{2n}^1\cos^{2n-1}\alpha\sin\alpha - C_{2n}^3\cos^{2n-3}\alpha\sin^3\alpha + \ldots.$,

откуда $\frac{\sin 2n\alpha}{\cos\alpha} = C_{2n}^1\cos^{2n-2}\alpha\sin\alpha - C_{2n}^3\cos^{2n-4}\alpha\sin^3\alpha + \ldots.$;

положимъ теперь $\sin\alpha = x$; тогда $\cos^2\alpha = 1 - x^2$ и, слѣд.,

$$\frac{\sin 2n\alpha}{\cos\alpha} = C_{2n}^1 (1-x^2)^n x - C_{2n}^3 (1-x^2)^{n-1} x^3 + \ldots,$$

т.-е.
$$\frac{\sin 2n\alpha}{\cos\alpha} = F_{2n-1}(x),$$

гдѣ $F_{2n-1}(x)$ — *цѣлый многочленъ $(2n-1)$'ой степени.*

Такой многочленъ имѣетъ, какъ извѣстно, $2n-1$ корней; но $\sin 2n\alpha$ обращается въ нуль при значеніяхъ α, либо равныхъ одному изъ слѣдующихъ $(2n-1)$ чиселъ:

$$0,\ \pm\frac{\pi}{2n},\ \pm\frac{2\pi}{2n},\ \pm\frac{3\pi}{2n},\ \ldots\ \pm\frac{(n-1)\pi}{2n},$$

либо отличающихся отъ нихъ на цѣлую кратность числа π; а такъ какъ $\sin\alpha$, т.-е. x отъ прибавки такой кратности къ α не мѣняется, то, слѣд., корни многочлена $F_{2n-1}(x)$ соотвѣтственно равны:

$$0,\ \pm\sin\frac{\pi}{2n},\ \pm\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right),\ \pm\sin\left(\frac{3\pi}{2n}\right),\ \ldots\ \pm\sin\left[\frac{(n-1)\pi}{2n}\right].$$

Ввиду того, что всѣ эти корни — одиночные, можемъ написать,

что $$\frac{\cos\alpha}{\sin 2n\alpha} = \frac{1}{F_{2n-1}(x)} = \frac{A_0}{x} + \sum_{k=1}^{k=n-1} \left\{ \frac{A_k}{x - \sin\frac{k\pi}{2n}} + \frac{B_k}{x + \sin\frac{k\pi}{2n}} \right\};$$

для опредѣленія A_k, помножимъ это равенство на $\left(x - \sin k\frac{\pi}{2n}\right)$ и затѣмъ положимъ $x = \sin\frac{k\pi}{2n}$, т.-е. $\alpha = \frac{k\pi}{2n}$; тогда въ правой части останется лишь A_k и мы получимъ:

$$A_k = \left\{ \frac{\left[x - \sin\frac{k\pi}{2n}\right]\cdot\cos\alpha}{\sin 2n\alpha} \right\}_{\alpha = k\frac{\pi}{2n}} = \left\{ \frac{\sin\alpha - \sin\frac{k\pi}{2n}}{\sin 2n\alpha}\cos\alpha \right\}_{\alpha = k\frac{\pi}{2n}} = \frac{0}{0}$$

или $$A_k = \left\{ \frac{\left[\sin\alpha - \sin\frac{k\pi}{2n}\right]'_\alpha}{[\sin 2n\alpha]'_\alpha} \right\}_{\alpha=\frac{k\pi}{2n}} \cdot \cos k\frac{\pi}{2n} = \frac{\cos\frac{k\pi}{2n}}{2n\cos k\pi} \cdot \cos\frac{k\pi}{2n},$$

т.-е. $$A_k = \frac{\cos^2\frac{k\pi}{2n}}{2n\cos k\pi} = \frac{(-1)^k}{2n}\cos^2\frac{k\pi}{2n};$$

отсюда легко найти и B_k, ибо онъ, очевидно, получается изъ A_k замѣною π на $-\pi$, такъ что и

$$B_k = \frac{(-1)^k}{2n}\cos^2\frac{k\pi}{2n},$$

а слѣд.,

$$\frac{\cos\alpha}{\sin 2n\alpha} = \frac{1}{2nx} + \sum_{k=1}^{k=n-1}(-1)^k\cos^2\frac{k\pi}{2n}\left[\frac{1}{2n\left(x-\sin\frac{k\pi}{2n}\right)} + \frac{1}{2n\left(x+\sin\frac{k\pi}{2n}\right)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2n\sin\alpha} + \sum_{k=1}^{k=m}(-1)^k\cos^2\frac{k\pi}{2n}\left\{\frac{1}{2n\left(\sin\alpha-\sin\frac{k\pi}{2n}\right)} + \frac{1}{2n\left(\sin\alpha+\sin\frac{k\pi}{2n}\right)}\right\} + R_m,$$

гдѣ m — любое цѣлое число, не превышающее $(n-1)$, а

$$R_m = \sum_{k=m+1}^{k=n-1}(-1)^k\cos^2\frac{k\pi}{2n}\left\{\frac{1}{2n\left(\sin\alpha-\sin\frac{k\pi}{2n}\right)} + \frac{1}{2n\left(\sin\alpha+\sin\frac{k\pi}{2n}\right)}\right\}.$$

Полагая теперь $2n\alpha = z$ и, слѣд., $\alpha = \frac{z}{2n}$, имѣемъ:

$$\frac{\cos\frac{z}{2n}}{\sin z} = \frac{1}{2n\sin\frac{z}{2n}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=m}(-1)^k\cos^2\frac{k\pi}{2n}\left\{\frac{1}{2n\left(\sin\frac{z}{2n}-\sin\frac{k\pi}{2n}\right)} + \frac{1}{2n\left(\sin\frac{z}{2n}+\sin\frac{k\pi}{2n}\right)}\right\} + R_m;$$

увеличивая же здѣсь n до ∞ и помня, что sinus безк.-малой

дуги эквивалентенъ ей самой, такъ что

$$\text{Пред.}\left(2n\sin\frac{\omega}{2n}\right)_{n....\infty} = \text{Пред.}\left(2n\cdot\frac{\omega}{2n}\right)_{n....\infty} = \omega,$$

въ предѣлѣ получимъ:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{k=m}(-1)^k\left\{\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{z+k\pi}\right\} + (R_m)_0,$$

гдѣ

$$(R_m)_0 = \text{Пред.}\,(R_m)_{n....\infty} =$$

$$= \text{Пред.}\left\{\sum_{k=m+1}^{k=n-1}(-1)^k\cos^2\frac{k\pi}{2n}\,\frac{\left[\sin\frac{z}{2n}+\sin\frac{k\pi}{2n}\right]+\left[\sin\frac{z}{2n}-\sin\frac{k\pi}{2n}\right]}{2n\left(\sin\frac{z}{2n}-\sin\frac{k\pi}{2n}\right)\left(\sin\frac{z}{2n}+\sin\frac{k\pi}{2n}\right)}\right\}_{n....\infty} =$$

$$= \text{Пред.}\left\{\sum_{k=m+1}^{k=n-1}(-1)^k\cos^2\frac{k\pi}{2n}\cdot\frac{2\sin\frac{z}{2n}}{2n\left(\sin^2\frac{z}{2n}-\sin^2\frac{k\pi}{2n}\right)}\right\}_{n....\infty};$$

число m можно взять на столько большимъ, чтобы имѣть $k\pi > z$ при всякомъ $k \geqslant m+1$; тогда

$$\frac{z}{2n} < \frac{k\pi}{2n},$$

и такъ какъ обѣ эти дуги меньше 90°, то и $\sin^2\frac{z}{2n} < \sin^2\frac{k\pi}{2n}$ или $\sin^2\frac{z}{2n} - \sin^2\frac{k\pi}{2n} < 0$ при всякомъ $k \geqslant m+1$, т.-е. *сумма, выражающая R_m, знакоперемѣнна;* съ другой стороны $\sin^2\frac{k\pi}{2n}$, а слѣд., и $\sin^2\frac{k\pi}{2n} - \sin^2\frac{z}{2n}$, растутъ вмѣстѣ съ k, такъ что *члены этой суммы постепенно все время убываютъ;* изъ этихъ двухъ обстоятельствъ заключаемъ, что безконечный рядъ которымъ выражается $(R_m)_0$, — знакоперемѣнный и сходящійся, почему его сумма по абсолютной величинѣ меньше его перваго члена, т.-е.

$$|(R_m)_0| \leqslant \text{Пред.}\left\{\cos^2\frac{(m+1)\pi}{2n}\cdot\frac{2\sin\frac{z}{2n}}{2n\left[\sin^2\frac{(m+1)\pi}{2n}-\sin^2\frac{z}{2n}\right]}\right\}_{n\ldots\infty} =$$

$$=\cos^2 0\cdot\frac{2\ \text{Пред.}\left(2n\sin\frac{z}{2n}\right)_{n\ldots\infty}}{\text{Пред.}\left[\left(2n\sin\frac{(m+1)\pi}{2n}\right)^2-\left(2n\sin\frac{z}{2n}\right)^2\right]_{n\ldots\infty}}=\frac{2z}{(m+1)^2\pi^2-z^2},$$

а слѣд.,
$$(R_m)_0=\frac{2\theta z}{(m+1)^2\pi^2-z^2},$$

гдѣ θ — правильная дробь.

Такимъ образомъ

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{k=m}(-1)^k\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{z+k\pi}\right)+\frac{2\theta z}{(m+1)^2\pi^2-z^2},$$

увеличивая же здѣсь m до ∞, окончательно получимъ:

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{z+k\pi}\right).$$

Слѣдствіе. Полагая въ этомъ разложеніи $z=p\pi$, получаемъ еще:

$$\frac{1}{\sin p\pi}=\frac{1}{p\pi}+\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{p\pi-k\pi}+\frac{1}{p\pi+k\pi}\right)$$

и, слѣд.,
$$\frac{\pi}{\sin p\pi}=\frac{1}{p}+\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{p-k}+\frac{1}{p+k}\right).$$

119. IV. Величина $B(p, 1-p)$.

Изъ выраженія $B(p,q)=\int_0^1\frac{x^{p-1}+x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$

выводимъ, что $B(p, 1-p) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} + \int_0^1 \frac{x^{-p}\,dx}{1+x}$;

но простымъ дѣленіемъ получаемъ:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x};$$

поэтому $B(p, 1-p) = \int_0^1 \Big\{1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$

$$+ (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}\Big\} x^{p-1}\,dx + \int_0^1 \Big\{1 - x + x^2 - x^3 + \ldots.$$

$$+ (-1)^{n-1} x^{n-1} + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}\Big\} x^{-p}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \Big\{x^{p-1} - x^p + x^{p+1} - x^{p+2} + \ldots + (-1)^n x^{p+n-1} + (-1)^{n+1} \frac{x^{p+n}}{1+x}\Big\} dx +$$

$$+ \int_0^1 \Big\{x^{-p} - x^{1-p} + x^{2-p} - x^{3-p} + \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1-p} + (-1)^n \frac{x^{n-p}}{1+x}\Big\} dx =$$

$$= \int_0^1 \Big\{\frac{x^p}{p} - \frac{x^{p+1}}{p+1} + \frac{x^{p+2}}{p+2} - \frac{x^{p+3}}{p+3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{p+n}}{p+n}\Big\} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{p+n}\,dx}{1+x} +$$

$$+ \int_0^1 \Big\{\frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{x^{2-p}}{2-p} + \frac{x^{3-p}}{3-p} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-p}}{n-p}\Big\} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n-p}\,dx}{1+x} =$$

$$= \frac{1}{p} - \Big(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p-1}\Big) + \Big(\frac{1}{p+2} + \frac{1}{p-2}\Big) +$$

$$- \Big(\frac{1}{p+3} + \frac{1}{p-3}\Big) + \ldots + (-1)^n \Big(\frac{1}{p+n} + \frac{1}{p-n}\Big) +$$

$$+ (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n-p} - x^{n+p}}{1+x}\,dx = \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \Big(\frac{1}{p-k} + \frac{1}{p+k}\Big) +$$

$$+ (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n-p} - x^{n+p}}{1+x}\,dx;$$

а такъ какъ

$$\text{Пред.}\left\{\int_0^1 \frac{x^{n-p}-x^{n+p}}{1+x}\,dx\right\}_{n=\infty} = \text{Пред.}\left\{\int_0^1 \frac{1-x^{2p}}{1+x}\,x^{n-p}\,dx\right\}_{n=\infty} =$$

$$= \text{Пред.}\left\{\left(\frac{1-x^{2p}}{1+x}\right)_{\text{ср.}} \int_0^1 x^{n-p}\,dx\right\}_{n=\infty} = \text{Пред.}\left\{\left(\frac{1-x^{2p}}{1+x}\right)_{\text{ср.}} \left|\frac{x^{n+1-p}}{n+1-p}\right|_0^1\right\}_{n=\infty} =$$

$$= \text{Пред.}\left\{\left(\frac{1-x^{2p}}{1+x}\right)_{\text{ср.}} \frac{1}{n+1-p}\right\}_{n=\infty} = 0,$$

то, увеличивая n до ∞, получимъ:

$$\mathrm{B}(p, 1-p) = \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{p-k} + \frac{1}{p+k}\right),$$

т.-е., на основаніи слѣдствія леммы № 111-го:

$$\underline{\mathrm{B}(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.}$$

Прим. $\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}(1-x)^{-\frac{2}{3}}\,dx = \mathrm{B}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 3{,}63.$

120. V. **Выраженіе функціи** B **съ помощью функціи** Γ:

$$\underline{\mathrm{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.}$$

По опредѣленію имѣемъ: $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx;$

положимъ здѣсь $x = ty$, гдѣ t — любое, постоянное относительно y, положительное число; тогда

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty (ty)^{n-1} e^{-ty}\,t\,dy = t^n \int_0^\infty y^{n-1} e^{-ty}\,dy,$$

откуда $$\frac{1}{t^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty y^{n-1} e^{-ty}\, dy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (*).$$

Вспоминая выраженіе: $\mathrm{B}(p, q) = \int_0^\infty \frac{z^{p-1}\, dz}{(1+z)^{p+q}}$,

положимъ $\underline{t = 1 + z}$ и $\underline{n = p + q}$;

тогда получимъ: $\frac{1}{(1+z)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty y^{p+q-1} e^{-(1+z)y}\, dy$;

и такъ какъ это равенство существуетъ при всякомъ $z \geqslant 0$, то можемъ, умноживъ его на $z^{p-1}\, dz$, проинтегрировать по z отъ 0 до ∞, что дастъ

$$\int_0^\infty \frac{z^{p-1}\, dz}{(1+z)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty z^{p-1}\, dz \int_0^\infty y^{p+q-1} e^{-(1+z)y}\, dy,$$

т.-е. $$\mathrm{B}(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty dz \int_0^\infty y^{p+q-1} e^{-(1+z)y} z^{p-1}\, dy \quad (**).$$

Положимъ теперь

$$\omega(A, z) = \int_A^\infty y^{p+q-1} e^{-(1+z)y} z^{p-1}\, dy \text{ и } \varphi(A, z) = \int_A^\infty y^{p+q-1} e^{-y}\, dy;$$

такъ какъ интегралъ $\int_0^\infty y^{p+q-1} e^{-y}\, dy$, т.-е. $\Gamma(p+q)$—сходящійся,

то $$\text{Пред.} \{\varphi(A, z)\}_{A=\infty} = 0 \text{ при всякомъ } z;$$

съ другой стороны, считая $A > 1$, имѣемъ:

$$\omega(A, z) = \int_A^\infty y^{p+q-1} e^{-y} z^{p-1} e^{-zy}\, dy < e^{-z} \int_A^\infty y^{p+q-1} e^{-y} z^{p-1}\, dy,$$

ибо множитель e^{-zy} тѣмъ больше, чѣмъ y меньше, а на участкѣ (A, ∞) имѣемъ $y > 1$; стало быть

$$\omega(A, z) < z^{p-1} e^{-z} \varphi(A, z),$$

а потому $$\int_0^\infty \omega(A, z)\, dz < \int_0^\infty z^{p-1} e^{-z} \varphi(A, z)\, dz =$$

$$= [\varphi(A, z)]_{\text{ср.}} \int_0^\infty z^{p-1} e^{-z}\, dz = [\varphi(A, z)]_{\text{ср.}}\, \Gamma(p)$$

и, слѣд.,

$$\text{Пред.} \left\{ \int_0^\infty \omega(A, z)\, dz \right\}_{A \ldots \infty} \leqslant \text{Пред.} \left\{ [\varphi(A, z)]_{\text{ср.}}\, \Gamma(p) \right\}_{A \ldots \infty} = 0.$$

Поэтому въ равенствѣ (**) можемъ измѣнить порядокъ интегрированія, при чемъ получимъ:

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty y^{p+q-1} e^{-y}\, dy \int_0^\infty z^{p-1} e^{-yz}\, dz;$$

но полагая $y = z$, $t = y$ и $n = p$ въ выраженіи (*) имѣемъ:

$$\int_0^\infty z^{p-1} e^{-yz}\, dz = \frac{\Gamma(p)}{y^p};$$

слѣд.,

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty y^{p+q-1} e^{-y} \cdot \frac{\Gamma(p)}{y^p}\, dy = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty y^{q-1} e^{-y}\, dy,$$

т.-е. $$\mathrm{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\, \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Эта зависимость, какъ позволяющая функцію *двухъ* аргументовъ выразить помощью функціи *одного* аргумента, чрезвы-

чайно важна, ибо, во-первыхъ, придется, значитъ, составить таблицу значеній лишь для функціи $\Gamma(n)$, а во-вторыхъ, въ этой таблицѣ будетъ лишь одно входное число.

Главнѣйшія свойства функціи $\Gamma(n)$.

121. *Если* $n > 1$, *то*

$$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1).$$

Въ самомъ дѣлѣ, если $n > 1$, то, интегрируя по частямъ, получаемъ:

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx = \int_0^\infty x^{n-1}\,d(-e^{-x}) =$$

$$= -\Big|_0^\infty x^{n-1} e^{-x} + (n-1)\int_0^\infty x^{(n-1)-1} e^{-x}\,dx,$$

т.-е. $$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1).$$

Слѣдствіе 1. Если $n > m$, гдѣ m — цѣлое число, то, примѣняя послѣдовательно предыдущее равенство, находимъ:

$$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\,\Gamma(n-2) = \ldots.$$

т.-е. $$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots(n-m)\,\Gamma(n-m);$$

это равенство показываетъ, что *функцію* Γ *отъ неправильной дроби можно всегда выразить помощью* Γ *отъ правильной дроби*, т.-е. *таблицу значеній этой функціи достаточно составить для участка* $(0;\ 1)$.

Слѣдствіе 2. Въ частномъ случаѣ, когда n — цѣлое, мы,

полагая $m = n - 1$, получаемъ:

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots.3.2.1.\Gamma(1),$$

т.-е. $$\underline{\Gamma(n) = 1.2.3\ldots.(n-1) = (n-1)!}$$

122. II. *Если p — правильная положительная дробь, то*

$$\underline{\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}}.$$

Дѣйствительно, полагая $q = 1 - p$ въ равенствѣ

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

получаемъ: $$B(p, 1-p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \Gamma(p)\Gamma(1-p);$$

и такъ какъ $$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

то $$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Это равенство позволяетъ найти Γ отъ правильной дроби p, большей половины, когда извѣстно $\Gamma(1-p)$; слѣд., *таблицу значеній функціи $\Gamma(n)$ достаточно имѣть на участкѣ* $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Частный случай. Беря $p = \frac{1}{2}$, получаемъ:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi$$

и, слѣд., $$\underline{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}},$$

т.-е. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Полагая же здѣсь $x = y^2$, получаемъ:

$$2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}, \quad \text{откуда} \quad \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

123. III. **Выраженіе $\Gamma(n)$ подъ видомъ безконечнаго произведенія.**

Полагая $x = my$ въ равенствѣ

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx,$$

получаемъ: $$\Gamma(p) = m^p \int_0^\infty y^{p-1} e^{-my}\,dy;$$

и такъ какъ $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{1.2} + \ldots . > 1 + y,$

то $$e^{-my} = (e^y)^{-m} < \frac{1}{(1+y)^m}$$

и, слѣд., $\Gamma(p) < m^p \int_0^\infty \frac{y^{p-1}\,dy}{(1+y)^m}$, т.-е. $\Gamma(p) < m^p\,\mathrm{B}(p, m-p)$

или еще $$\Gamma(p) < (m+p+1)^p\,\mathrm{B}(p, m+1).$$

Съ другой стороны

$$\Gamma(p) = m^p \int_0^\infty y^{p-1} e^{-my}\,dy > m^p \int_0^1 y^{p-1} e^{-my}\,dy,$$

и такъ какъ $e^{-y} = 1 - y + \frac{y^2}{1.2} - \ldots . > 1 - y,$

то $$\Gamma(p) > m^p \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^m\,dy = m^p\,\mathrm{B}(p, m+1).$$

Такимъ образомъ

$$m^p \mathrm{B}(p, m+1) < \Gamma(p) < (m+p+1)^p \mathrm{B}(p, m+1)$$

или $$1 < \frac{\Gamma(p)}{m^p \mathrm{B}(p, m+1)} < \frac{(m+p+1)^p}{m^p} = \left(1+\frac{p+1}{m}\right)^p,$$

откуда $$\frac{\Gamma(p)}{m^p \mathrm{B}(p, m+1)} = \left(1+\theta\frac{p+1}{m}\right)^p,$$

гдѣ θ — *правильная положительная дробь;* а слѣд.,

$$\Gamma(p) = m^p \mathrm{B}(p, m+1) \cdot \left(1+\theta\frac{p+1}{m}\right)^p;$$

увеличивая же m до ∞, получаемъ:

$$\Gamma(p) = \text{Пред.}\left\{m^p \mathrm{B}(p, m+1)\right\}_{m=\infty}.$$

Но

$$\mathrm{B}(p, m+1) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(m+1)}{\Gamma(p+m+1)} = \frac{\Gamma(p).1.2.3\ldots m}{(p+m)(p+m-1)\ldots(p+1)p.\Gamma(p)} =$$

$$= \frac{1.2.3\ldots m}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+m)};$$

значитъ, окончательно:

$$\Gamma(p) = \text{Пред.}\left\{\frac{m^p}{p}\cdot\frac{1.2.3\ldots m}{(p+1)(p+2)\ldots(p+m)}\right\}_{m=\infty}.$$

§ 3. Приложеніе опредѣленныхъ интеграловъ къ теоріи сходимости безконечныхъ рядовъ.

124. **Теорема Коши-Маклорена.** *Предположимъ, что функція $f(x)$ при всякомъ $x > a$ положительна и непрестанно убываетъ до нуля при увеличеніи x до ∞; тогда интегралъ*

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

и рядъ

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots$$

будутъ сходящимися или расходящимися оба одновременно.

Дѣйствительно, по условію

$$f(a+k) > f(x) > f(a+k+1),$$

если только $$a+k < x < a+k+1;$$

отсюда $$\int_{a+k}^{a+k+1} f(a+k)\,dx > \int_{a+k}^{a+k+1} f(x)\,dx > \int_{a+k}^{a+k+1} f(a+k+1)\,dx,$$

т.-е. $$f(a+k) > \int_{a+k}^{a+k+1} f(x)\,dx > f(a+k+1).$$

Давая здѣсь числу k значенія 0, 1, 2, ... $(n-1)$ и складывая соотвѣтствующія неравенства, получаемъ:

$$S_n > \int_a^{a+n} f(x)\,dx > S_{n+1} - f(a),$$

гдѣ для краткости положено

$$S_n = f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots + f(a+n-1).$$

Значитъ, если $\int_0^\infty f(x)\,dx$ — расходящійся,

такъ что $$\int_a^{a+n} f(x)\,dx$$

растетъ безгранично вмѣстѣ съ n, то то-же будетъ и съ S_n, а слѣд., и рядъ S — расходящійся. Обратно, если

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ — сходящійся}$$

и, слѣд., представляетъ конечное число, то и S_{n+1} не растетъ безгранично, ибо

$$S_{n+1} < \int_a^{a+n} f(x)\,dx + f(a);$$

а такъ какъ S_{n+1} растетъ все время вмѣстѣ съ n, ибо по условію всѣ члены ряда положительны, то, значитъ, S_{n+1}, при n — растущемъ безгра-

нично, стремится къ нѣкоторому опредѣленному предѣлу, т.-е. рядъ S — сходящійся.

Прим. Для ряда

$$S = 1 + \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots.$$

имѣемъ: $$f(x) \equiv \frac{1}{x^k} \quad \text{и} \quad \int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^k};$$

слѣд., рядъ будетъ сходящимся при $k > 1$ и расходящимся при $k \leqslant 1$.

§ 4. Формула Стирлинга.

125. **Формула Стирлинга** служитъ для вычисленія приближенной величины произведенія $1.2.3\ldots.n$ при весьма большомъ n и выражается слѣдующимъ равенствомъ:

$$1.2.3\ldots.n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Мы выведемъ ее по способу Серре — изъ формулы Валлиса (№ 45), для чего положимъ

$$1.2.3\ldots.n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.\varphi(n);$$

тогда помянутая формула дастъ:

$$\frac{\pi}{2} = \text{Пред.}\left\{\frac{2.2.4.4.6.6.8.\ldots.\ 2n\ .\ 2n}{1.3.3.5.5.7.7.\ldots.(2n-1)(2n+1)}\right\}_{n\ldots.\infty} =$$

$$= \text{Пред.}\left\{\frac{(2.4.6.8.\ldots.2n)^2}{[1.3.5.\ldots.(2n-1)]^2(2n+1)}\right\}_{n\ldots.\infty} =$$

$$= \text{Пред.}\left\{\left[\frac{(2.4.6.\ldots.2n)^2}{1.2.3.4.\ldots.(2n-1)\,2n}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1}\right\}_{n\ldots.\infty} =$$

$$= \text{Пред.}\left\{\frac{(1.2.3.\ldots.n)^4\,2^{4n}}{(1.2.3.\ldots.2n)^2} \cdot \frac{1}{2n+1}\right\}_{n\ldots.\infty} =$$

$$= \text{Пред.}\left\{\frac{\left[\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.\varphi(n)\right]^4 2^{4n}}{\left[\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi.2n}.\varphi(2n)\right]^2} \cdot \frac{1}{2n+1}\right\}_{n\ldots.\infty} =$$

$$= \text{Пред.}\left\{\frac{[\varphi(n)]^4}{[\varphi(2n)]^2} \cdot \frac{\pi n}{2n+1}\right\}_{n\ldots.\infty} = \frac{\pi}{2}\,\text{Пред.}\left\{\frac{[\varphi(n)]^4}{[\varphi(2n)]^2}\right\}_{n\ldots.\infty};$$

отсюда Пред. $\left\{\frac{[\varphi(n)]^4}{[\varphi(2n)]^2}\right\}_{n....\infty} = \frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2} = 1$ и, слѣд., Пред. $\left\{\frac{[\varphi(n)]^2}{\varphi(2n)}\right\}_{n....\infty} = 1.$

Съ другой стороны $\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$

и, слѣд., $l\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = -1+\left(n+\frac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{1}{n}\right) =$

$$= -1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-....+\frac{(-1)^{k-1}}{kn^k}+\frac{(-1)^k}{(k+1)n^{k+1}}+....\right] =$$

$$= \frac{1}{12n^2}-\frac{1}{12n^3}+\frac{3}{40n^4}+....+\frac{(-1)^k(k-1)}{2k(k+1)n^k}+.....(1),$$

при чемъ, полагая $U_k = (-1)^k\frac{k-1}{2k(k+1)n^k}$,

имѣемъ $\left|\frac{U_{k+1}}{U_k}\right| = \frac{k^2}{k^2+k-2}\cdot\frac{1}{n}$, такъ что Пред. $\left|\frac{U_{k+1}}{U_k}\right|_{k....\infty} = \frac{1}{n}$,

т.-е. *этотъ рядъ — абсолютно сходящійся* при всякомъ цѣломъ $n > 1$.

Но $\varphi(n) = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}\cdot\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n+2)}....\frac{\varphi(n+m)}{\varphi(n+m+1)}\cdot\varphi(n+m+1)$,

откуда

$$l\varphi(n) = l\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}+l\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n+2)}+....+l\frac{\varphi(n+m)}{\varphi(n+m+1)}+l\varphi(n+m+1)....(2);$$

полагая же здѣсь $m+1 = n$,

имѣемъ $l\varphi(n)-l\varphi(2n) = l\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}+l\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n+2)}+....+l\frac{\varphi(2n-1)}{\varphi(2n)}$.

Такъ какъ рядъ (1) — знакоперемѣнный, то

$$l\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{\theta_1}{12n^2}$$

и точно такъ же $l\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n+2)} = \frac{\theta_2}{12(n+1)^2}, ...l\frac{\varphi(2n-1)}{\varphi(2n)} = \frac{\theta_n}{12(2n-1)^2}$,

при чемъ $0 < \theta_i < 1$;

слѣд., $l\left[\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}\right] = l\varphi(n)-l\varphi(2n) = \frac{\theta_1}{12n^2}+\frac{\theta_2}{12(n+1)^2}+....+\frac{\theta_n}{12(2n-1)^2}$,

такъ что

$$0 < l\left[\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}\right] < \frac{1}{12n^2}+\frac{1}{12(n+1)^2}+....+\frac{1}{12(2n-1)^2} < \overbrace{\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{12n^2}+....+\frac{1}{12n^2}}^{n\text{ разъ}} = \frac{1}{12n},$$

а потому $0 \leqslant \text{Пред.} \left[l \frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} \right]_{n....\infty} \leqslant \text{Пред.} \left(\frac{1}{12n} \right)_{n....\infty} = 0,$

т.-е. $\text{Пред.} \left[l \frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} \right]_{n....\infty} = 0$ и, слѣд., $\text{Пред.} \left[\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} \right]_{n....\infty} = 1;$

а выше мы еще нашли, что $\text{Пред.} \left\{ \frac{[\varphi(n)]^2}{\varphi(2n)} \right\}_{n....\infty} = 1;$

значитъ, $\text{Пред.} [\varphi(n)]_{n....\infty} = 1,$ т.-е. $\text{Пред.} \left\{ \frac{1.2.3....n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \right\}_{n....\infty} = 1,$

а потому имѣемъ приблизительно:

$$1.2.3....n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

при чемъ ошибочность этого равенства уменьшается до нуля при увеличеніи n до ∞.

Глава V.

Приложенія интегральнаго исчисленія къ геометріи.

§ I. Площадь плоской кривой въ Декартовыхъ координатахъ.

126. Мы видѣли въ № 28-мъ, что если функція $f(x)$ — однозначна, то *площадь* S, *ограниченная при* **прямоугольныхъ Декартовыхъ координатахъ** *осью абсциссъ, ординатами* y_0 *и* Y, *отвѣчающими абсциссамъ* x_0 *и* X, *и кривою* $y = f(x)$, *равна*

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

при чемъ *площадки надъ осью* OX *считаемъ положительными, а подъ этой осью — отрицательными.* Слѣд., если хотимъ найти *ариѳметическую* сумму S всѣхъ такихъ площадокъ, то надо найти тѣ значенія абсциссы—напр., $x_1, x_2, \ldots . x_n$, при которыхъ функція $f(x)$ мѣняетъ знакъ, и если, напр., отъ x_0 до x_1 имѣемъ $f(x) > 0$, то

$$S = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx - \ldots .$$

Прим. 1. *Найти площадь S, ограниченную* **синусоидой** (чертежъ 15):

$$y = \sin x$$

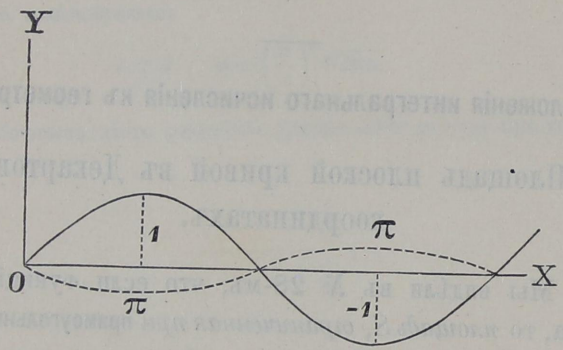
на участкѣ:

$$(0, 2\pi).$$

Такъ какъ $y>0$ отъ $x=0$ до $x=\pi$ и $y<0$ отъ $x=\pi$ до $x=2\pi$,

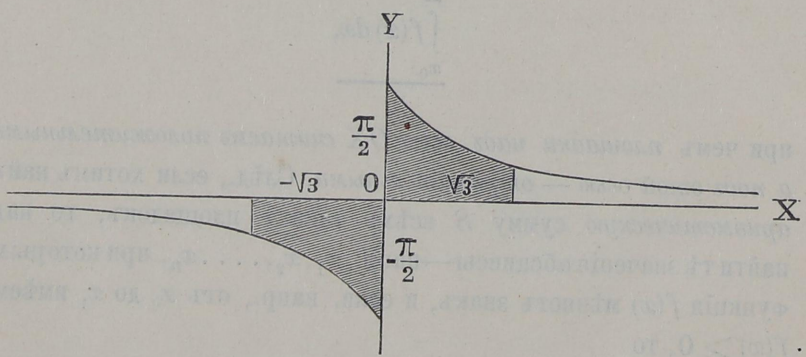
то $$S = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = \Big|_0^{\pi} - \cos x - \Big|_{\pi}^{2\pi} - \cos x = 4.$$

Черт. 15.



Прим. 2. *Найти площадь S, ограниченную* (черт. 16) *осью OX,*

Черт. 16.



осью OY, кривою

$$y = \operatorname{Arccotg} x$$

и ординатами, отвѣчающими абсциссамъ $x_0 = -\sqrt{3}$ *и* $X = \sqrt{3}$.

Такъ какъ y мѣняетъ знакъ (разрываясь) при $x = 0$, то

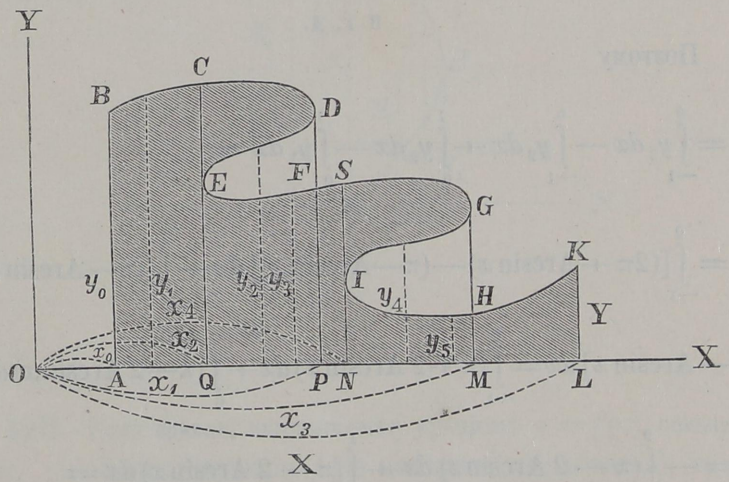
$$S = -\int_{-\sqrt{3}}^{0} \operatorname{Arccotg} x\,dx + \int_{0}^{\sqrt{3}} \operatorname{Arccotg} x\,dx = -\int_{\sqrt{3}}^{0} \operatorname{Arccotg} z\,dz +$$

$$+ \int_{0}^{\sqrt{3}} \operatorname{Arccotg} x\,dx = 2\int_{0}^{\sqrt{3}} \operatorname{Arccotg} x\,dx = 2\left\{ \Big| x \operatorname{Arccotg} x + \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{x^2+1} \right\} =$$

$$= 2\sqrt{3} \operatorname{Arccotg} \sqrt{3} + l4 = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 2l2 = 3{,}2001 \text{ (приблиз).}$$

127. Если функція $f(x)$ — **многозначна**, то площадь, ограниченная ею, опредѣлится слѣдующимъ образомъ. Прежде всего

Черт. 17.



находимъ тѣ значенія абсциссы, при которыхъ два значенія ординаты, отвѣчающія одному и тому же x, становятся равными; пусть это будутъ x_1, x_2, x_3, ...; тогда, проведя соотвѣтствующія имъ ординаты (черт. 17) QEC, PFD и т. д., будемъ имѣть, что

$$S = ABCQ + CDE + QESN + SGI + NIKL =$$

$$= ABDP - QEDP + QEGM - NIGM + NIKL =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} y_1\,dx - \int_{x_2}^{x_1} y_2\,dx + \int_{x_2}^{x_3} y_3\,dx - \int_{x_4}^{x_3} y_4\,dx + \int_{x_4}^{X} y_5\,dx.$$

Замѣчаніе. Если часть кривой лежитъ ниже оси абсциссъ, то соотвѣтствующіе интегралы должно взять съ обратнымъ знакомъ.

Прим. 1. *Найти площадь 1-й и 2-й полуволны кривой* $y = \arcsin x$.

Имѣемъ: $y_1 =$ Arcsin x . . . . дуга AOB,

$y_2 = \pi -$ Arcsin x . . . . дуга BCD,

$y_3 = 2\pi +$ Arcsin x . . . . дуга DEF

и т. д.

Поэтому

$$S = \int_{-1}^{0} y_3\,dx - \int_{-1}^{0} y_2\,dx + \int_{0}^{1} y_2\,dx - \int_{0}^{1} y_1\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} [(2\pi + \operatorname{Arcsin} x) - (\pi - \operatorname{Arcsin} x)]\,dx + \int_{0}^{1} [(\pi - \operatorname{Arcsin} x) +$$

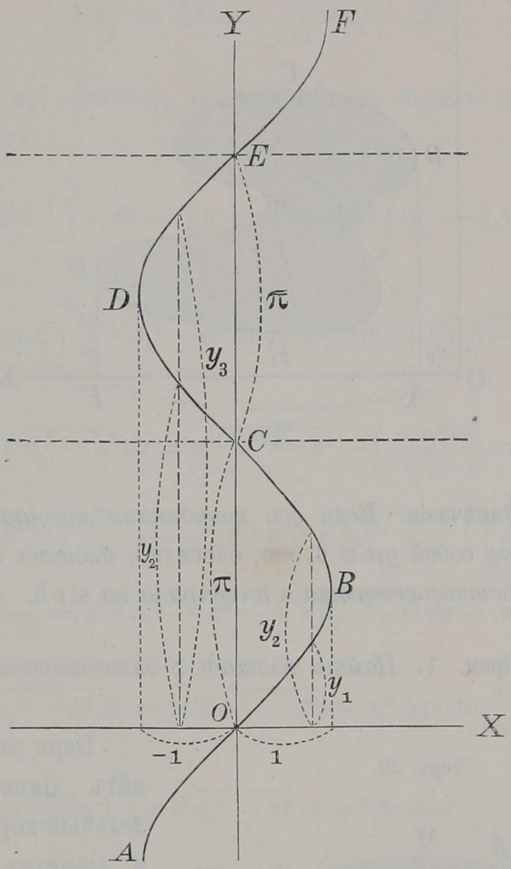
$$+ \operatorname{Arcsin} x]\,dx = \int_{-1}^{0} (\pi + 2 \operatorname{Arcsin} x)\,dx + \int_{0}^{1} (\pi - 2 \operatorname{Arcsin} x)\,dx =$$

$$= -\int_{1}^{0} (\pi - 2 \operatorname{Arcsin} z)\,dz + \int_{0}^{1} (\pi - 2 \operatorname{Arcsin} x)\,dx =$$

$$= 2\int_{0}^{1} (\pi - 2 \operatorname{Arcsin} x)\,dx = 2\left\{\pi - 2\left[\int_{0}^{1} x \operatorname{Arcsin} x - \int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right]\right\}$$

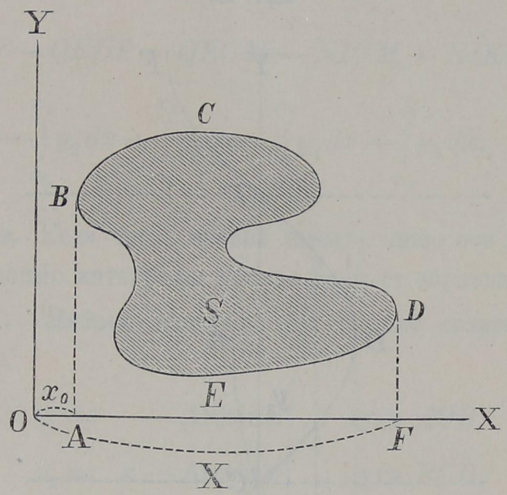
$$= 2\left\{\pi - 2\left[\frac{\pi}{2} + \int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\right]\right\} = 4.$$

Черт. 18.



128. Если кривая, выражаемая ур-ніемъ $y = f(x)$, сомкнутая (черт. 19) (слѣд., функція $f(x)$ навѣрное многозначна), то для опредѣленія заключенной внутри ея площади S *надо*, очевидно, *найти отдѣльно площади, опирающіяся на ось* OX *и ограниченныя одна — верхней половиной* BCD *кривой, а другая — нижней* BED, *и взять ихъ разность, при чемъ абсциссы* x_0 *и* X *точекъ* B *и* D *опредѣлятся, какъ наименьшая и наибольшая изъ тѣхъ, при которыхъ ординаты* y_k *и* y_{k+1} *становятся равными.*

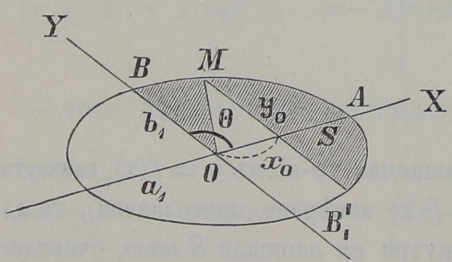
Черт. 19.



129. Замѣчаніе. *Если оси координатъ косоугольны и образуютъ между собой уголъ* θ, *то*, очевидно, *площадь* S *равна произведенію соотвѣтствующаго интеграла на* $\sin\theta$.

130. Прим. 1. *Найти площадь* S *эллиптическаго сегмента* (черт. 20).

Черт. 20.



Беря за оси координатъ діаметръ, параллельный хордѣ сегмента, и діаметръ, сопряженный съ нею, выразимъ, какъ извѣстно, эллипсъ уравненіемъ:

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1,$$

гдѣ $2a_1$ и $2b_1$ — длины этихъ діаметровъ; ур-ніе это даетъ:

$$y_1=\frac{b_1}{a_1}\sqrt{a_1^2-x^2},\quad y_2=-\frac{b_1}{a_1}\sqrt{a_1^2-x^2},$$

такъ что бо́льшій предѣлъ X интегрированія опредѣлится ур-іемъ

$$\frac{b_1}{a_1}\sqrt{a_1^2 - X^2} = -\frac{b_1}{a_1}\sqrt{a_1^2 - X^2},$$

откуда $X = a_1$; поэтому, обозначая еще черезъ x_0 абсциссу хорды, имѣемъ:

$$S = \sin\theta\left[\int_{x_0}^{a_1} y_1\,dx - \int_{x_0}^{a_1} y_2\,dx\right] = \sin\theta\int_{x_0}^{a_1}(y_1 - y_2)\,dx =$$

$$= 2\sin\theta\int_{x_0}^{a_1}\frac{b_1}{a_1}\sqrt{a_1^2 - x^2}\,dx = 2\frac{b_1}{a_1}\sin\theta\int_{x_0}^{a_1}\sqrt{a_1^2 - x^2}\,dx.$$

Но $\int\sqrt{a_1^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a_1^2 - x^2} - \int\frac{-x^2\,dx}{\sqrt{a_1^2 - x^2}} =$

$$= x\sqrt{a_1^2 - x^2} - \int\frac{a_1^2 - x^2 - a_1^2}{\sqrt{a_1^2 - x^2}}\,dx = x\sqrt{a_1^2 - x^2} - \int\sqrt{a_1^2 - x^2}\,dx +$$

$$+ a_1^2\int\frac{dx}{\sqrt{a_1^2 - x^2}} = x\sqrt{a_1^2 - x^2} - \int\sqrt{a_1^2 - x^2}\,dx + a_1^2\operatorname{Arcsin}\frac{x}{a_1};$$

слѣд., $2\int\sqrt{a_1^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a_1^2 - x^2} + a_1^2\operatorname{Arcsin}\frac{x}{a_1} + C,$

а потому $S = \frac{b_1}{a_1}\sin\theta\left|\left[x\sqrt{a_1^2 - x^2} + a_1^2\operatorname{Arcsin}\frac{x}{a_1}\right]\right._{x_0}^{a_1} =$

$$= \frac{b_1}{a_1}\sin\theta\left\{a_1^2\operatorname{Arcsin}1 - x_0\sqrt{a_1^2 - x_0^2} - a_1^2\operatorname{Arcsin}\frac{x_0}{a_1}\right\},$$

т.-е. $$S = \left\{\frac{\pi a_1 b_1}{2} - x_0 y_0 - a_1 b_1\operatorname{Arcsin}\frac{x_0}{a_1}\right\}\sin\theta. \ldots\ldots (1).$$

Полагая $x_0 = 0$, найдемъ величину половины площади S_0 эллипса — именно:

$$\frac{S_0}{2} = \frac{\pi a_1 b_1}{2}\sin\theta. \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

откуда $$\underline{S_0 = \pi a_1 b_1 \sin\theta};$$

а если за оси координатъ приняты оси симметріи эллипса, такъ что $\theta = 90^0$, то просто

$$S_0 = \pi ab,$$

гдѣ a и b — полуоси кривой.

Вычитая равенство (1) изъ (2), получаемъ:

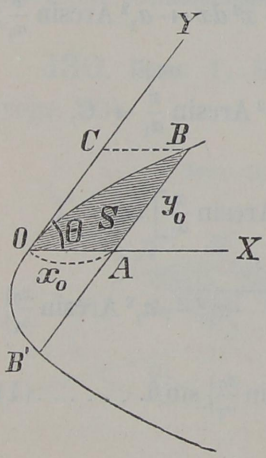
$$\frac{S_0}{2} - S = x_0 y_0 + a_1 b_1 \operatorname{Arcsin} \frac{x_0}{a_1}$$

и, слѣд., $$\frac{S_0}{2} - S - x_0 y_0 = a_1 b_1 \operatorname{Arcsin} \frac{x_0}{a_1},$$

т.-е. площ. сектора $OBM = \frac{a_1 b_1}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{x_0}{a_1}$.

131. **Прим. 2.** *Найти площадь параболическаго полусегмента* (черт. 21).

Черт. 21.



Если за ось OX принять діаметръ, сопряженный съ хордой сегмента, а за OY — касательную въ его концѣ, то ур-ніе параболы будетъ: $y^2 = 2p_1 x$ и даетъ

$$y_1 = \sqrt{2p_1 x},$$

а слѣд.,

$$S = \sin\theta \int_0^{x_0} y_1 \, dx = \sqrt{2p_1} \sin\theta \int_0^{x_0} x^{\frac{1}{2}} \, dx =$$

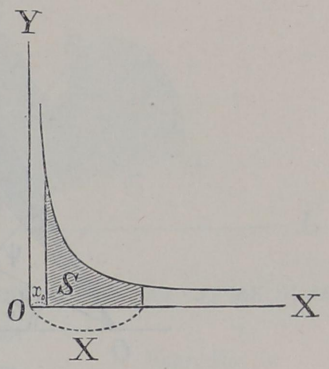
$$= \sqrt{2p_1} \sin\theta \Big|_0^{x_0} \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sin\theta \, . \, x_0 \sqrt{2p_1 x_0},$$

т.-е. $$S = \frac{2}{3} \cdot [x_0 y_0 \sin\theta].$$

Такимъ образомъ *площадь параболическаго полусегмента равна* $\frac{2}{3}$ *площади параллелограмма, построеннаго на основаніи и ординатѣ этого полусегмента.* Результатъ этотъ найденъ еще Архимедомъ, въ нѣсколько только иной формѣ.

132. Прим. 3. *Найти площадь* S (черт. 22), *ограниченную гиперболой, ея ассимптотой и двумя параллелями другой ассимптоты.*

Черт. 22.



Примемъ ассимптоты за оси координатъ, при чемъ уголъ между ними обозначимъ черезъ θ. Ур-ніе гиперболы тогда будетъ

$$xy = \frac{c^2}{4}, \quad \text{гдѣ} \quad c^2 = a^2 + b^2;$$

отсюда $$y = \frac{c^2}{4x}$$

и, слѣд., $$S = \sin\theta \cdot \frac{c^2}{4} \int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x} = \frac{c^2}{4} \sin\theta \,.\, (lX - lx_0) = \frac{c^2}{4}\, l\frac{X}{x_0} \sin\theta.$$

Если гипербола *равнобочная*, т.-е. $a = b$, то $\sin\theta = 1$

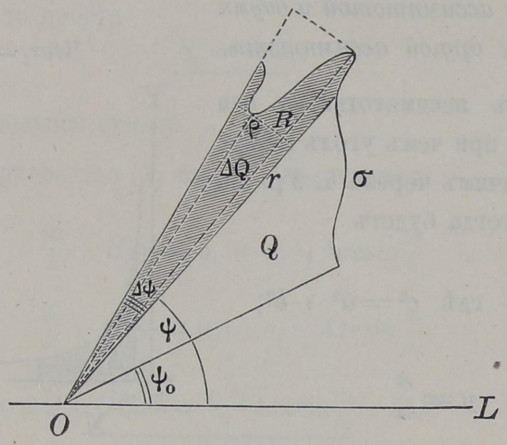
и, беря $x_0 = 1$, получаемъ: $S = \frac{a^2}{2} lX$.

Отсюда и ведетъ начало названіе Неперовыхъ логариѳмовъ—*гиперболическими*.

§ II. Площадь сектора, ограниченнаго кривою и двумя радіусами векторами (*въ полярныхъ координатахъ*).

133. Обозначая такую площадь (черт. 23) черезъ Q, дадимъ долготѣ ψ крайняго радіуса вектора r приращеніе $\Delta\psi$ и обозначимъ соотвѣтствующее приращеніе площади черезъ ΔQ. Пусть кромѣ того наименьшее и наибольшее значенія радіуса-вектора въ углѣ $\Delta\psi$ суть ρ и R; площади *круговыхъ* секторовъ, отвѣчающихъ центральному углу $\Delta\psi$ и описанныхъ радіусами ρ и R,

Черт. 23.



какъ извѣстно, равны $\left|\frac{\rho^2\,\Delta\psi}{2}\right|$ и $\left|\frac{R^2\,\Delta\psi}{2}\right|$ *)

и очевидно, что $$\left|\frac{\rho^2\Delta\psi}{2}\right| \leqslant |\Delta Q| \leqslant \left|\frac{R^2\,\Delta\psi}{2}\right|,$$

а слѣд., $$\frac{\rho^2}{2} \leqslant \left|\frac{\Delta Q}{\Delta\psi}\right| \leqslant \frac{R^2}{2},$$

откуда, подводя $\Delta\psi$ къ нулю и помня, что, при непрерывности кривой σ, имѣемъ Пред. $(\rho)_{\Delta\psi\ldots0}$ = Пред. $(R)_{\Delta\psi\ldots0} = r$,

получимъ: $$\frac{r^2}{2} \leqslant |Q'_\psi| \leqslant \frac{r^2}{2},$$

а, значитъ, $$Q'_\psi = \pm\frac{r^2}{2} \text{ и } \underline{dQ = \pm\frac{r^2\,d\psi}{2}},$$

при чемъ, очевидно, *знакъ «плюсъ» надо брать тогда, когда площадь Q растетъ при увеличеніи ψ, а знакъ «минусъ» — когда она при этомъ убываетъ.*

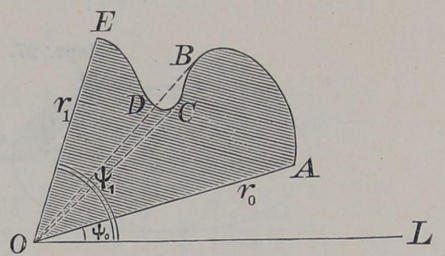
---

*) Уголъ $\Delta\psi$ можетъ быть и положительнымъ, и отрицательнымъ, насъ же интересуетъ въ данный моментъ абсолютная величина площади ΔQ.

134. На основаніи послѣдней формулы заключаемъ, что

$$Q = \pm \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{r^2\, d\psi}{2},$$

Черт. 24.

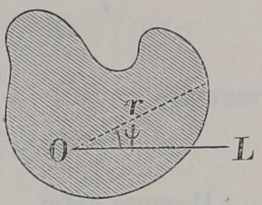


если только r есть однозначная функція долготы ψ на всемъ участкѣ (ψ_0, ψ_1); въ противномъ случаѣ надо принять предосторожности, подобныя указаннымъ выше для случая прямолинейныхъ координатъ — напр., для случая, изображеннаго на черт. 24-мъ имѣемъ:

$Q =$ площ. $OABO -$ площ. $OCBO +$

$+$ площ. $OCEO.$

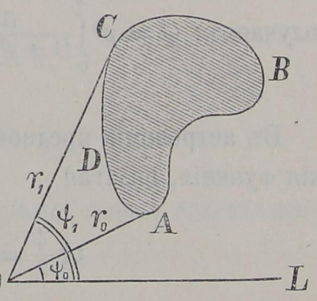
Черт. 25.



Если кривая — сомкнутая и полюсъ лежитъ внутри ея (черт. 25), *то интегрировать надо*, очевидно, **отъ 0 до 2π**, т.-е.

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{r^2\, d\psi}{2};$$

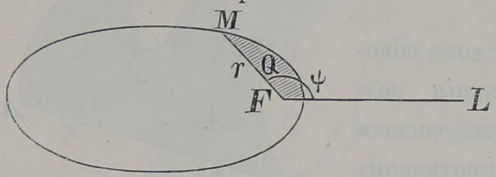
Черт. 26.



если же полюсъ — внѣ кривой (черт. 26), *то надо найти площадь* S_1, *ограниченную дальнѣйшей отъ полюса частью ABC кривой, и площадь* S_2, *ограниченную ближайшей ея частью ADC, и взять разность* $S_1 - S_2$. При этомъ, вычисляя S (въ первомъ случаѣ), S_1 и S_2 (во второмъ), должно соблюдать вышеупомянутыя предосторожности.

135. **Прим. 1.** *Найти площадь эллиптическаго сектора* (черт. 27), *вершина котораго — въ фокусѣ кривой, а одинъ изъ боковыхъ радіусовъ-векторовъ идетъ къ ближайшей ея вершинѣ.*

Черт. 27.



Принимая этотъ фокусъ за полюсъ, а большую ось — за полярную, выразимъ, какъ извѣстно, эллипсъ ур-ніемъ:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\psi}{p}, \text{ гдѣ } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \; p = \frac{b^2}{a},$$

такъ что $$Q = \frac{p^2}{2}\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{(1 + e\cos\psi)^2}.$$

Полагая здѣсь $$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = z$$

и, слѣд., $$\cos\psi = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \; d\psi = \frac{2dz}{1 + z^2},$$

получаемъ: $$Q = p^2\int_0^{z} \frac{(1 + z^2)\,dz}{[1 + z^2 + e(1 - z^2)]^2} = p^2\int_0^{z} \frac{(1 + z^2)\,dz}{[(1 + e) + (1 - e)\,z^2]^2}.$$

Въ астрономіи предпочитаютъ снова ввести тригонометрическія функціи, полагая

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = z = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2},$$

съ условіемъ, что u *растетъ все время вмѣстѣ съ* ψ; уголъ ψ наз. *истинной аномаліей*, а u — *эксцентрической аномаліей* соотвѣтствующей точки эллипса.

Такъ какъ эта зависимость даетъ:

$$dz = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{du}{2\cos^2\frac{u}{2}},\quad 1+z^2 = 1+\frac{1+e}{1-e}\operatorname{tg}^2\frac{u}{2} = \frac{(1-e)+(1+e)\operatorname{tg}^2\frac{u}{2}}{1-e}$$

и $$1+e+(1-e)z^2 = (1+e)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{u}{2}\right) = \frac{1+e}{\cos^2\frac{u}{2}},$$

то $$Q = p^2\int_0^u \frac{\left[(1-e)+(1+e)\operatorname{tg}^2\frac{u}{2}\right]}{(1-e)(1+e)^2}\cos^2\frac{u}{2}\cdot\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{du}{2} =$$

$$= \frac{p^2}{2(1-e^2)\sqrt{1-e^2}}\int_0^u \left[(1-e)\cos^2\frac{u}{2}+(1+e)\sin^2\frac{u}{2}\right]du =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^u \left[\left(\cos^2\frac{u}{2}+\sin^2\frac{u}{2}\right)-e\left(\cos^2\frac{u}{2}-\sin^2\frac{u}{2}\right)\right]du =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^u (1-e\cos u)\,du = \frac{ab}{2}\Big|_0^u (u-e\sin u),$$

т.-е. $$\underline{Q = \frac{ab}{2}(u-e\sin u).}$$

Для нахожденія площади $\frac{Q_0}{2}$ половины эллипса надо положить

$$\psi = \pi \text{ и, слѣд., } u = \pi,$$

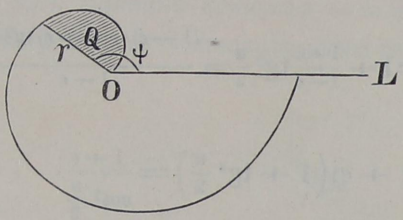
что даетъ $$\underline{Q_0 = \pi ab.}$$

136. **Прим. 2.** *Площадь части перваго витка* **Архимедовой спирали** (черт. 28):

$$\underline{r = a\psi}$$

равна $$Q = \frac{a^2}{2}\int_0^{\psi_0}\psi^2\,d\psi = \Big|_0^{\psi_0}\frac{a^2\psi^3}{6} = \frac{a^2\psi_0^3}{6} = \frac{r_0^3}{6a},$$

Черт. 28.



т.-е. *эта площадь пропорціональна кубу долготы или кубу радіуса-вектора конца дуги.*

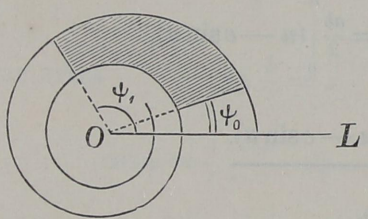
При $\psi_0 = 2\pi$, получаемъ, что *площадь перваго витка*

$$Q_1 = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 = \frac{\pi}{3}(2\pi a)^2 = \frac{\pi R^2}{3},$$

гдѣ R — радіусъ векторъ, отвѣчающій $\psi = 2\pi$.

Прим. 3. *Площадь части* $(k+1)$*'го витка* **гиперболической спирали** (черт. 29):

Черт. 29.



$$r = \frac{a}{\psi}$$

равна

$$Q = \frac{1}{2}\int_{\psi_0}^{\psi_1} (r_k^2 - r_{k+1}^2)\, d\psi,$$

гдѣ $r_k = \frac{a}{2k\pi + \psi}$,

$$r_{k+1} = \frac{a}{2(k+1)\pi + \psi};$$

слѣд.,

$$Q = \frac{a^2}{2}\int_{\psi_0}^{\psi_1}\left\{\frac{d\psi}{[2k\pi+\psi]^2} - \frac{d\psi}{[2(k+1)\pi+\psi]^2}\right\} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\Bigg|_{\psi_0}^{\psi_1}\left\{-\frac{1}{2k\pi+\psi} + \frac{1}{2(k+1)\pi+\psi}\right\} = -\pi a^2\Bigg|_{\psi_0}^{\psi_1}\frac{1}{(2k\pi+\psi)[2(k+1)\pi+\psi]} =$$

$$= \pi a^2\left\{\frac{1}{[2k\pi+\psi_0][2(k+1)\pi+\psi_0]} - \frac{1}{[2k\pi+\psi_1][2(k+1)\pi+\psi_1]}\right\}.$$

Полагая $\psi_0 = 0$, $\psi_1 = 2\pi$, найдемъ площадь Q_{k+1} всего

$(k+1)$'го витка:

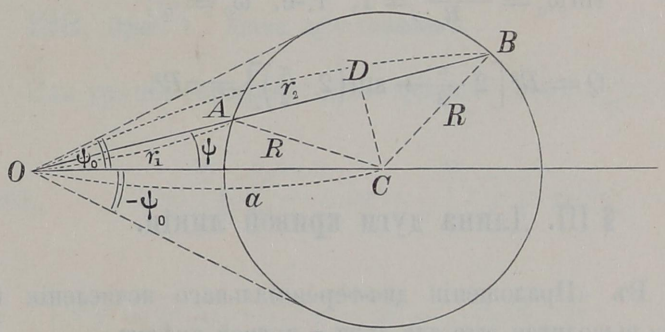
$$Q_{k+1} = \pi a^2 \left\{ \frac{1}{2k\pi \cdot 2(k+1)\pi} - \frac{1}{2(k+1)\pi \cdot 2(k+2)\pi} \right\} = \frac{a^2}{2\pi k(k+1)(k+2)};$$

напр., $Q_2 = \frac{a^2}{12\pi}$, $Q_3 = \frac{a^2}{48\pi}$, и т. д.

Прим. 4. *Найти площадь круга радіуса R, центръ котораго (черт. 30) лежитъ на полярной оси въ разстояніи a отъ полюса, при чемъ $a \geqslant R$.*

Изъ чертежа имѣемъ, что

Черт. 30.



$$r_2 = OD + DB = a\cos\psi + \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\psi}$$

и $$r_1 = OD - AD = a\cos\psi - \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\psi},$$

а слѣд., $$Q = \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} d\psi = \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \frac{(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)}{2} d\psi =$$

$$= 2a\int_{-\psi_0}^{\psi_0} \cos\psi \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\psi}\, d\psi = 4a\int_0^{\psi_0} \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\psi}\cos\psi d\psi.$$

Для нахожденія этого интеграла, положимъ:

$$a\sin\psi = R\sin\omega \text{ и, слѣд., } a\cos\psi\, d\psi = R\cos\omega\, d\omega;$$

тогда получимъ: $Q = 4\int_0^{\omega_0} R\cos\omega \,.\, R\cos\omega d\omega = 4R^2\int_0^{\omega_0}\cos^2\omega d\omega =$

$$= 2R^2\int_0^{\omega_0}(1+\cos 2\omega)\,d\omega = R^2\Big|_0^{\omega_0}[2\omega+\sin 2\omega] = R^2(2\omega_0+\sin 2\omega_0).$$

Но уголъ ψ_0 опредѣляется условіемъ $r_2 = r_1$, которое даетъ; что $a\cos\psi_0 + \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\psi_0} = a\cos\psi_0 - \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\psi_0}$

и, слѣд., $R^2 - a^2\sin^2\psi_0 = 0$, откуда $\sin\psi_0 = \frac{R}{a}$,

а потому $\sin\omega_0 = \frac{a\sin\psi_0}{R} = 1$, т.-е. $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$;

значитъ, $Q = R^2\left[2\cdot\frac{\pi}{2} + \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right] = \pi R^2$.

§ III. Длина дуги кривой линіи.

137. Въ «Приложеніи дифференціальнаго исчисленія къ геометріи» выводится, что для дуги σ кривой имѣемъ:

$$d\sigma = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \pm\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2\sin^2\varphi d\psi^2},$$

гдѣ x, y, z — Декартовы координаты, а r, ψ и φ — полярныя, при чемъ ψ — долгота, а φ — дополненіе широты.

Отсюда

$$\sigma = \pm\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \pm\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2\sin^2\varphi d\psi^2},$$

гдѣ *черезъ t обозначена перемѣнная, считаемая при интегрированіи за независимую, а t_0 и t_1 — ея значенія, отвѣчающія на-*

началу и концу дуги. При этомъ *знакъ передъ корнемъ надо всегда выбирать такъ, чтобы дуга, при увеличеніи аргумента t, либо все время росла, либо все время убывала*, т.-е. *чтобы σ'_t сохраняла одинъ и тотъ же знакъ;* поэтому, если при нѣкоторыхъ значеніяхъ аргумента эта σ'_t мѣняетъ свой знакъ, то надо участокъ интегрированія разбить соотвѣтственно на части и для каждой изъ нихъ вычислить дугу отдѣльно.

Если кривая—плоская и лежитъ въ плоскости XOY, то предыдущія формулы упрощаются; именно — тогда

$$d\sigma = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm\sqrt{dr^2 + r^2\,d\downarrow^2}.$$

138. **Прим. 1. Длина дуги параболы.**

Изъ ур-нія параболы: $y^2 = 2px$ получаемъ: $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}$;

слѣд., $$\sigma = \int_0^{y_0} \sqrt{\frac{y^2}{p^2} + 1}\,dy = \frac{1}{p}\int_0^{y_0} \sqrt{y^2 + p^2}\,dy;$$

но $$\int \sqrt{y^2 + p^2}\,dy = y\sqrt{y^2 + p^2} - \int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^2 + p^2}} =$$

$$= y\sqrt{y^2 + p^2} - \int \sqrt{y^2 + p^2}\,dy + p^2 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + p^2}},$$

откуда $$\int \sqrt{y^2 + p^2}\,dy = \frac{y\sqrt{y^2 + p^2}}{2} + \frac{p^2}{2}\,l\left(y + \sqrt{y^2 + p^2}\right),$$

а потому $$\sigma = \frac{1}{p}\left|\left\{\frac{y\sqrt{y^2 + p^2}}{2} + \frac{p^2}{2}\,l\left(y + \sqrt{y^2 + p^2}\right)\right\}\right|_0^{y_0},$$

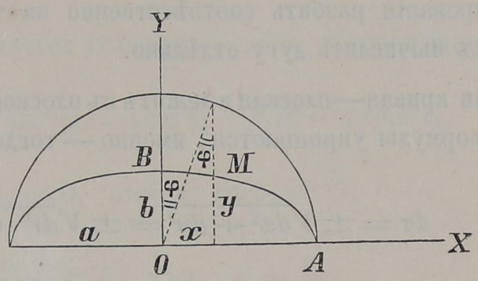
т.-е. $$\sigma = \frac{y_0\sqrt{y_0^2 + p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\,l\,\frac{y_0 + \sqrt{y_0^2 + p^2}}{p}$$

или еще $$\sigma = \sqrt{x_0^2 + \frac{px_0}{2}} + \frac{p}{2}\,l\left(\sqrt{\frac{2x_0}{p}} + \sqrt{\frac{2x_0}{p} + 1}\right).$$

139. **Прим. 2. Длина дуги σ эллипса.**

Ур-ніе эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Черт. 31.



будетъ, очевидно, удовлетворено, если положимъ:

$$x=a\sin\varphi,\quad y=b\cos\varphi\ldots\ldots\ldots\ldots(1);$$

эти выраженія даютъ:

$$dx=a\cos\varphi d\varphi,\quad dy=-b\sin\varphi d\varphi,$$

а слѣд., для дуги, *отсчитываемой отъ вершины* B, имѣемъ:

$$\sigma=\int_0^{\varphi}\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\int_0^{\varphi}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=a\int_0^{\varphi}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

такъ что *эта дуга выражается Лежандровымъ эллиптическимъ интеграломъ второго рода*, при чемъ ясно, что *она меньше отвѣчающей тому же углу* φ *дуги* $a\varphi$ *окружности радіуса* a.

Такъ какъ для эллипса $e<1$, то можемъ $\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$ развернуть въ рядъ, *сходящійся при* **всякомъ** φ, а слѣд., допускаю-

щій его *почленное интегрированіе;* такимъ образомъ получаемъ:

$$\sigma = a\int_0^{\varphi}(1 - e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\,d\varphi =$$

$$= a\int_0^{\varphi}\left\{1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2.4}e^4\sin^4\varphi - \frac{1.3}{2.4.6}e^6\sin^6\varphi - \ldots.\right\}d\varphi =$$

$$= a\left\{\int_0^{\varphi}d\varphi - \frac{1}{2}e^2\int_0^{\varphi}\sin^2\varphi d\varphi - \frac{1}{2.4}e^4\int_0^{\varphi}\sin^4\varphi d\varphi - \frac{1.3}{2.4.6}e^6\int_0^{\varphi}\sin^6\varphi d\varphi - \ldots.\right\}.$$

Отсюда для дуги σ_0 всего эллипса имѣемъ:

$$\sigma_0 = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 4a\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi - \frac{1}{2}e^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi - \frac{1}{2.4}e^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi d\varphi - \ldots.\right\},$$

т.-е. $\sigma_0 = 2\pi a\left\{1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2 - \ldots.\right\}.$

Оба найденныхъ ряда сходятся тѣмъ быстрѣе, чѣмъ меньше эксцентрицитетъ e эллипса.

140. **Прим. 3. Длина дуги Архимедовой спирали** (черт. 28).

Ур-ніе $r = a\psi$ этой спирали даетъ: $dr = ad\psi$, такъ что

$$\sigma = a\int_0^{\psi_0}\sqrt{1 + \psi^2}\,d\psi = a\left|\left\{\frac{\psi\sqrt{1 + \psi^2}}{2} + \frac{1}{2}l\left(\psi + \sqrt{1 + \psi^2}\right)\right\}\right.,$$

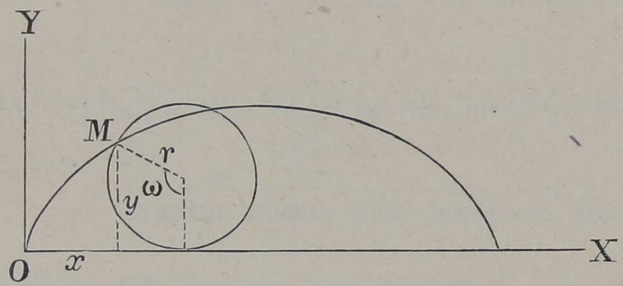
т.-е. $$\sigma = \frac{\psi_0\sqrt{1 + \psi_0^2}}{2}a + \frac{a}{2}l\left(\psi_0 + \sqrt{1 + \psi_0^2}\right).$$

141. **Прим. 4. Длина дуги циклоиды** (черт. 32).

Ур-нія циклоиды: $x = r(\omega - \sin\omega)$, $y = r(1 - \cos\omega)$

дають: $dx = r(1 - \cos\omega)\,d\omega$, $dy = r\sin\omega d\omega$,

Черт. 32.



такъ что $\sigma = r\int_0^{\omega} \sqrt{(1-\cos\omega)^2 + \sin^2\omega}\,d\omega =$

$$= r\int_0^{\omega} \sqrt{1 - 2\cos\omega + 1}\,d\omega = 2r\int_0^{\omega} \sin\frac{\omega}{2}\,d\omega = 4r\Big|_0^{\omega}\left(-\cos\frac{\omega}{2}\right),$$

т.-е. $$\sigma = 4r\left(1 - \cos\frac{\omega}{2}\right) = 8r\sin^2\frac{\omega}{4}.$$

Вся же дуга σ_0 получится при $\omega = 2\pi$, такъ что $\underline{\sigma_0 = 8r}$.

142. **Прим. 5. Длина дуги винтовой линіи.**

Эта линія выражается слѣдующими ур-ніями:

$$x = r\cos\psi,\ y = r\sin\psi,\ z = r\,\mathrm{tg}\,\omega\,.\psi,$$

которыя дають:

$$dx = -r\sin\psi d\psi,\ dy = r\cos\psi d\psi,\ dz = r\,\mathrm{tg}\,\omega\,d\psi,$$

такъ что $\sigma = \int_0^{\psi_0} \sqrt{r^2 d\psi^2 + r^2\,\mathrm{tg}^2\,\omega d\psi^2} = r\sec\omega\int_0^{\psi_0} d\psi = r\psi_0\sec\omega.$

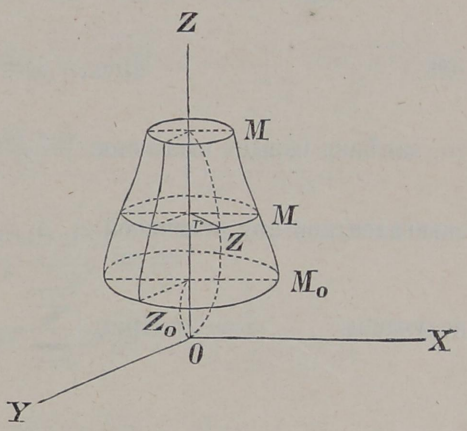
§ IV. Величина поверхности тѣла вращенія.

143. Предположимъ, что дуга M_0M нѣкоторой кривой σ, лежащей въ пл-ти ZOX, выражается ур-ніемъ $x = f(z)$, въ которомъ функція $f(z)$ — *однозначна и непрерывна на участкѣ* (z_0, Z) *и имѣетъ на немъ конечную производную.* Впишемъ въ эту дугу ломанную линію

$$M_0 M_1 M_2 \ldots . M_n M$$

и заставимъ ихъ объ вращаться вокругъ оси OZ; тогда дуга M_0M опишетъ нѣкоторую криволинейную пов-сть S, выражаемую, какъ легко видѣть, уравненіемъ

Черт. 33.



$$\sqrt{x^2 + y^2} = f(z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

а ломанная линія образуетъ другую пов-сть S', вписанную въ первую и *составленную изъ ряда боковыхъ поверхностей усѣченныхъ конусовъ.* Если затѣмъ станемъ уменьшать всѣ стороны ломанной до нуля (увеличивая, слѣд., ихъ число до ∞), то въ предѣлѣ координаты всѣхъ точекъ пов-сти S' будутъ, очевидно, удовлетворять тому же ур-нію (1), т.-е. *пов-сть* S' *въ предѣлѣ обращается въ пов-сть* S. Но, какъ извѣстно, обозначая черезъ S'_0, S'_1, S'_2, $\ldots . S'_n$ пов-сти помянутыхъ выше усѣченныхъ конусовъ, а черезъ x_0, x_1, x_2, $\ldots . x_n$, X абсциссы вершинъ ломанной, имѣемъ:

$$S' = \sum_{k=0}^{k=n} S'_k = \sum_{k=0}^{k=n} 2\pi \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \cdot \overline{M_k M_{k+1}},$$

а слѣд., $S = \text{Пред. } S' = 2\pi \text{ Пред.} \left\{ \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \overline{M_k M_{k+1}} \right\}_{n \ldots \infty}$;

и такъ какъ функція $f(z)$ предполагается непрерывной, такъ что

$$x_{k+1} = x_k + \varepsilon_k \text{ и, слѣд., } \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = x_k + \frac{\varepsilon_k}{2},$$

гдѣ $$\text{Пред.}(\varepsilon_k) = 0,$$

то, замѣняя каждое слагаемое $\frac{x_k + x_{k+1}}{2} \cdot \overline{M_k M_{k+1}}$

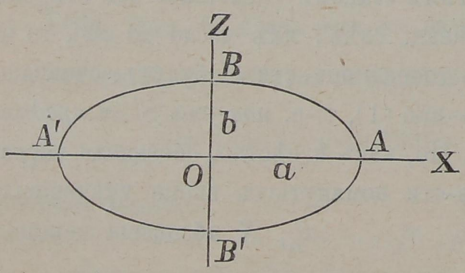
эквивалентной ему величиной $x_k . \Delta_k \sigma$,

получаемъ: $$S = 2\pi \text{ Пред.} \left\{ \sum_{k=0}^{k=n} x_k \Delta_k \sigma \right\}_{\Delta_k \sigma \ldots 0},$$

т.-е. $$S = 2\pi \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} x d\sigma.$$

144. **Прим. 1. Поверхность продолговатаго эллипсоида вращенія**, т.-е. полученнаго отъ вращенія эллипса (черт. 34)

Черт. 34.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

вокругъ его большой оси $A'A$.

Ур-ніе этого эллипса даетъ

$$z = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \text{ откуда } dz = -\frac{bxdx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

и, слѣд., $d\sigma = \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}}\, dx = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx =$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4 - c^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx = \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx,$$

а потому, обозначая всю пов-сть черезъ S_1, имѣемъ:

$$S_1 = 2\pi \int_{-a}^{a} z d\sigma = 2\pi \int_{-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx = 4\pi \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - e^2 x^2}\, dx.$$

Но $\int \sqrt{a^2 - e^2 x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - e^2 x^2} - \int \frac{-e^2 x^2}{\sqrt{a^2 - e^2 x^2}}\, dx =$

$$= x\sqrt{a^2 - e^2 x^2} - \int \frac{a^2 - e^2 x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - e^2 x^2}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - e^2 x^2} - \int \sqrt{a^2 - e^2 x^2}\, dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - e^2 x^2}},$$

откуда $\int \sqrt{a^2 - e^2 x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2 - e^2 x^2}}{2} + \frac{a^2}{2e}\operatorname{Arcsin}\frac{ex}{a} + C;$

слѣд., $S_1 = 4\pi \frac{b}{a}\Big|_0^a \left\{\frac{x\sqrt{a^2 - e^2 x^2}}{2} + \frac{a^2}{2e}\operatorname{Arcsin}\frac{ex}{a}\right\};$

т.-е. $$S_1 = 2\pi b^2 + 2\pi ab\frac{\operatorname{Arcsin} e}{e}.$$

145. **Прим. 2. Пов-сть S_2 сжатаго эллипсоида вращенія**, т.-е. полученнаго отъ вращенія эллипса (черт. 34) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ вокругъ малой оси $B'B$.

Въ этомъ случаѣ $x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - z^2}$ и $dx = -\frac{azdz}{b\sqrt{b^2 - z^2}}$,

а слѣд.,

$$d\sigma = \sqrt{\frac{a^2 z^2}{b^2 (b^2 - z^2)} + 1}\, dz = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2 z^2 + b^4 - b^2 z^2}{b^2 - z^2}}\, dz = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{b^4 + c^2 z^2}{b^2 - z^2}}\, dz,$$

такъ что

$$S_2 = 2\pi\int_{-b}^{b} x d\sigma = 2\pi\int_{-b}^{b}\frac{a}{b^2}\sqrt{b^4+c^2z^2}\,dz = \frac{4\pi a}{b^2}\int_0^b \sqrt{b^4+c^2z^2}\,dz;$$

и такъ какъ $\int\sqrt{b^4+c^2z^2}\,dz = z\sqrt{b^4+c^2z^2} - \int\frac{c^2z^2}{\sqrt{b^4+c^2z^2}}dz =$

$$= z\sqrt{b^4+c^2z^2} - \int\frac{b^4+c^2z^2-b^4}{\sqrt{b^4+c^2z^2}}dz =$$

$$= z\sqrt{b^4+c^2z^2} - \int\sqrt{b^4+c^2z^2}\,dz + b^4\int\frac{dz}{\sqrt{c^2z^2+b^4}},$$

откуда $\int\sqrt{b^4+c^2z^2}\,dz = \frac{z\sqrt{b^4+c^2z^2}}{2} + \frac{b^4}{2c}l\{cz+\sqrt{c^2z^2+b^4}\}$,

то $S_2 = \frac{4\pi a}{b^2}\Big|_0^b\left\{\frac{z\sqrt{b^4+c^2z^2}}{2} + \frac{b^4}{2c}l\left(cz+\sqrt{c^2z^2+b^4}\right)\right\}$,

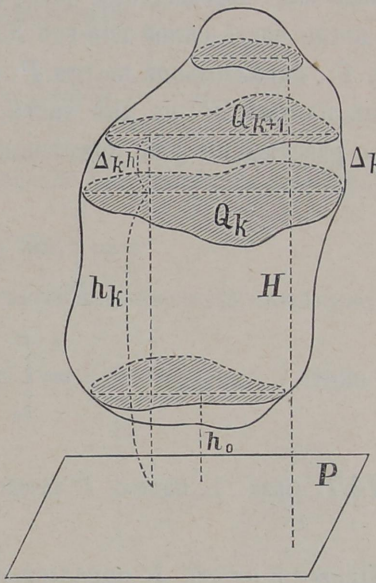
т.-е. $$S_2 = 2\pi a^2 + 2\pi\frac{b^2}{e}l\frac{a+c}{b}.$$

§ V. Объемы тѣлъ, у которыхъ площади параллельныхъ сѣченій суть извѣстныя функціи ихъ разстоянія до одного изъ нихъ.

146. Положимъ, что имѣемъ нѣкоторую непрерывную поверхность S (черт. 35), сѣченія коей пл-стями, параллельными нѣкоторой данной пл-сти P, представляютъ кривыя сомкнутыя, при чемъ величина Q_k площади, ограниченной подобною кривой, извѣстна намъ, *какъ функція разстоянія h_k ея плоскости до пл-сти P.* Разсмотримъ объемъ $\Delta_k v$, ограниченный данной поверхностью S и двумя смежными изъ такихъ сѣченій, напр., Q_k и Q_{k+1}; построимъ между этими же пл-ми три цилиндра: одинъ — $\Delta_k v_{\text{вн.}}$, каждая образующая коего имѣетъ общія точки

съ боковой пов-стью объема $\Delta_k v$, но не имѣетъ ни одной точки внѣ этого объема; другой — $\Delta_k v_{\text{нар.}}$, каждая образующая коего тоже имѣетъ общія точки съ боковой пов-стью объема $\Delta_k v$, но не имѣетъ точекъ внутри его; и третій — $\Delta_k v_0$, имѣющій основаніемъ площадь Q_k; тогда ясно, что

Черт. 35.



$$\Delta_k v_{\text{вн.}} < \Delta_k v < \Delta_k v_{\text{нар.}}$$

и

$$\Delta_k v_{\text{нар.}} > \Delta_k v_0 > \Delta_k v_{\text{вн.}},$$

а слѣд.,

$$\frac{\Delta_k v_{\text{вн.}}}{\Delta_k v_{\text{нар.}}} < \frac{\Delta_k v}{\Delta_k v_0} < \frac{\Delta_k v_{\text{нар.}}}{\Delta_k v_{\text{вн.}}}.$$

Но по предположенію пов-сть тѣла непрерывна; значитъ, при безк.-маломъ разстояніи $\Delta_k h$ пл-стей сѣченій Q_k и Q_{k+1}, площади основаній цилиндровъ $\Delta_k v_{\text{вн.}}$ и $\Delta_k v_{\text{нар.}}$ будутъ различаться тоже на величину безк.-малую и, слѣд.,

$$\text{Пред.}\left(\frac{\Delta_k v_{\text{вн.}}}{\Delta_k v_{\text{нар.}}}\right)_{\Delta_k h \ldots 0} = 1 \text{ и } \text{Пред.}\left(\frac{\Delta_k v_{\text{нар.}}}{\Delta_k v_{\text{вн.}}}\right)_{\Delta_k h \ldots 0} = 1,$$

а потому $1 \leqslant \text{Пред.}\left(\frac{\Delta_k v}{\Delta_k v_0}\right)_{\Delta_k h \ldots 0} \leqslant 1$ и, слѣд., $\text{Пред.}\left(\frac{\Delta_k v}{\Delta_k v_0}\right) = 1$,

т.-е. *безк.-малые объемы $\Delta_k v$ и $\Delta_k v_0$ эквивалентны другъ другу.* Поэтому для объема v, заключеннаго между пл-ми, проведенными параллельно пл-сти P въ разстояніяхъ h_0 и H отъ нея, имѣемъ:

$$v = \text{Пред.}\left\{\sum \Delta_k v\right\}_{\Delta_k h \ldots 0} = \text{Пред.}\left\{\sum \Delta_k v_0\right\}_{\Delta_k h \ldots 0} =$$

$$= \text{Пред.}\left\{\sum S_k \Delta_k h\right\}_{\Delta_k h \ldots 0},$$

т.-е. $$v = \int_{h_0}^{H} Sdh.$$

Замѣчаніе. Предыдущее разсужденіе не примѣнимо въ случаѣ, когда часть самой пов-сти S тѣла образуется частью плоскости P', параллельной пл-сти P; но тогда можно разбить объемъ v этой пл-стью P' на двѣ части, къ каждой изъ коихъ предыдущее разсужденіе ужѐ примѣнимо, а потому

$$v = \int_{h_0}^{h'} Sdh + \int_{h'}^{H} Sdh$$

т.-е. опять $$v = \int_{h_0}^{H} Sdh.$$

147. Прим. 1. Объемъ V эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Проводя пл-сть P параллельно XOY въ разстояніи z отъ нея, мы въ сѣченіи получимъ, какъ извѣстно, эллипсъ, ур-ніе котораго будетъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} = \frac{c^2 - z^2}{c^2} \text{ или } \frac{x^2}{\frac{a^2(c^2-z^2)}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2(c^2-z^2)}{c^2}} = 1;$$

значитъ, его полуоси равны: $a' = \frac{a\sqrt{c^2-z^2}}{c}$, $b' = \frac{b\sqrt{c^2-z^2}}{c}$,

почему его площадь $Q = \pi a' b' = \frac{\pi ab(c^2-z^2)}{c^2}$,

и, слѣд., $V = \frac{\pi ab}{c^2}\int_{-c}^{c}(c^2-z^2)\,dz = \frac{2\pi ab}{c^2}\left|\left(c^2 z - \frac{z^3}{3}\right)\right._0^c = \frac{4}{3}\pi abc.$

Для **продолговатаго эллипсоида вращенія**, полагая $c = b$, по-

лучаемъ

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi ab^2;$$

а для сжатаго, полагая $c = a$, находимъ

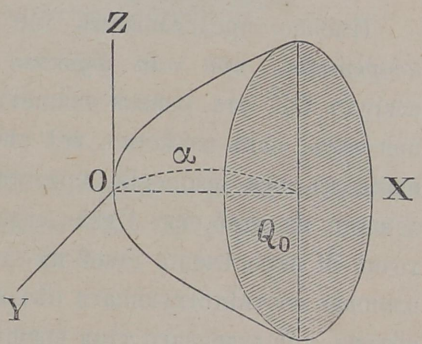
$$V_2 = \frac{4}{3}\pi a^2 b;$$

значитъ, *объемъ сжатаго эллипсоида больше объема растянутаго, при одинаковыхъ полуосяхъ.*

148. Прим. 2. Объемъ сегмента эллиптическаго параболоида:

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x,$$

Черт. 36.



ограниченный пл-стью

$$x = \alpha.$$

Сѣченіе пов-сти плоскостью, параллельной YOZ и проведенной отъ нея въ разстояніи x, есть эллипсъ

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x \text{ или } \frac{y^2}{2px} + \frac{z^2}{2qx} = 1,$$

полуоси коего равны: $b = \sqrt{2px}$ и $c = \sqrt{2qx}$,

а площадь $$Q = 2\pi\sqrt{pq}\,x;$$

поэтому

$$v = 2\pi\sqrt{pq}\int_0^{\alpha} x\,dx = 2\pi\sqrt{pq}\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^{\alpha} = \pi\sqrt{p\alpha}\cdot\sqrt{q\alpha}\cdot\alpha = \pi\sqrt{2p\alpha}\cdot\sqrt{2q\alpha}\cdot\frac{\alpha}{2};$$

но если b_0 и c_0—полуоси основанія Q_0 разсматриваемаго объема v,

то $$b_0 = \sqrt{2p\alpha} \text{ и } c_0 = \sqrt{2q\alpha},$$

а слѣд., $$v = \frac{\pi b_0 c_0 \alpha}{2} = \frac{Q_0 \alpha}{2},$$

т.-е. *объемъ сегмента эллиптическаго параболоида равенъ половинѣ объема цилиндра, имѣющаго то же основаніе и ту же высоту.*

149. **Объемы тѣлъ вращенія.**

Задача о нахожденіи объема какого-либо *тѣла вращенія* представляетъ, очевидно, частный случай задачи № 146-го.

Именно, предположимъ, что (черт. 33) *кривая* $\sigma \ldots x = f(z)$ *непрерывна, при чемъ функція* $f(z)$ *— однозначна;* вращаясь вокругъ OZ, эта кривая опишетъ нѣкоторую пов-сть вращенія, при чемъ, какъ извѣстно, всѣ сѣченія ея пл-ми, перпендикулярными къ оси вращенія, представляютъ круги, центры коихъ лежатъ на этой оси. Слѣд., если обозначимъ черезъ x абсциссу точки M пересѣченія такой пл-сти съ образующей кривой σ, то площадь соотвѣтствующаго сѣченія будетъ равна πx^2, а потому объемъ v полученнаго тѣла вращенія, заключенный между плоскостями, проведенными параллельно XOY въ разстояніяхъ z_0 и Z, опредѣлится уравненіемъ:

$$v = \pi \int_{z_0}^{Z} x^2 \, dz.$$

150. **Прим. Объемъ кольца, образованнаго вращеніемъ эллипса вокругъ прямой, параллельной его оси.**

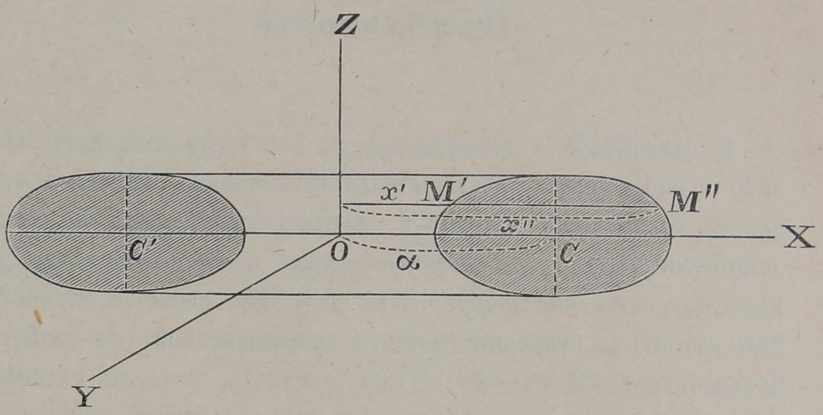
Если ось OX проведемъ черезъ центръ эллипса и абсциссу этого центра обозначимъ черезъ α, при чемъ считаемъ $\alpha > a$,

то ур-ніе эллипса въ пл-сти ZOX будетъ:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

откуда $x'=\alpha-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2}$, $x''=\alpha+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2}$;

Черт. 37.



и такъ какъ искомый объемъ есть, очевидно, разность объемовъ, образованныхъ вращеніемъ вокругъ оси OZ правой и лѣвой половинъ эллипса, то, значитъ,

$$v=\pi\int_{-b}^{b}(x''^2-x'^2)\,dz=2\pi\int_{0}^{b}(x''+x')(x''-x')\,dz=\frac{8\pi\alpha a}{b}\int_{0}^{b}\sqrt{b^2-z^2}\,dz=$$

$$=\frac{8\pi\alpha a}{b}\left|\left\{\frac{z\sqrt{b^2-z^2}}{2}+\frac{b^2}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{z}{b}\right\}\right._0^b=4\pi ab\cdot\alpha\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab\cdot 2\pi\alpha,$$

т.-е. *искомый объемъ равенъ площади самаго эллипса, умноженной на длину окружности, описанной его центромъ.*

Прибавленіе.

1. Какъ было упомянуто еще въ I-ой части, интегралъ какой либо функціи лишь въ исключительныхъ случаяхъ выражается конечной совокупностью функцій *алгебрическихъ, показательныхъ, логариѳмическихъ, тригонометрическихъ и круговыхъ, чаще же представляетъ нѣкоторую новую функцію*, свойства которой и надо изучить на основаніи свойствъ ея производной, т.-е. свойствъ подъинтегральной функціи. Чтобы показать, какъ это дѣлается, разсмотримъ два простѣйшихъ примѣра — именно, предположимъ, что намъ *извѣстны лишь алгебрическія функціи*, и изучимъ функціи, опредѣляемыя интегралами

$$\int \frac{dx}{x} \text{ и } \int \frac{dx}{1+x^2}.$$

2. I. $\int \frac{dx}{x}$.

Чтобы исключить постоянную произвольную, разсмотримъ вмѣсто неопредѣленнаго интеграла — опредѣленный, именно, положимъ:

$$L(x) = \int_1^x \frac{dx}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Здѣсь нижній предѣлъ выбранъ по произволу — только нуль и числа меньшія его брать нельзя, такъ какъ при $x = 0$ подъинтегральная функція $\frac{1}{x}$ обращается въ ∞.

Итакъ, $$L(x) = \int_1^x \frac{dx}{x} = \int_1^x \frac{du}{u}$$

и точно такъ же $$L(y) = \int_1^y \frac{dy}{y} = \int_1^y \frac{dv}{v};$$

слѣд., $$L(x) + L(y) = \int_1^x \frac{du}{u} + \int_1^y \frac{dv}{v} = \int_{u=1,\,v=1}^{u=x,\,v=y} \left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v}\right) =$$

$$= \int_{uv=1}^{uv=xy} \frac{v\,du + u\,dv}{uv} = \int_{uv=1}^{uv=xy} \frac{d(uv)}{uv} = L(xy).$$

Такимъ образомъ получили **функціональное ур-ніе**, *опредѣляющее функцію* $L(x)$, именно:

$$\underline{L(xy) = L(x) + L(y)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

Обозначимъ теперь черезъ E функцію, обратную функціи L, такъ что если $L(x) = \xi$, то $x = E(\xi)$; тогда, полагая еще

$$L(y) = \eta \text{ и } L(xy) = q,$$

получаемъ: $$E(\eta) = y,\ E(q) = xy = E(\xi)\,E(\eta);$$

и такъ какъ на основаніи (2) имѣемъ, что

$$q = \xi + \eta,$$

то, слѣд., $$\underline{E(\xi + \eta) = E(\xi)\,E(\eta).}$$

Это равенство представляетъ такъ наз. **формулу сложенія** функціи E; изъ него выводимъ, что

$$E(\xi + \eta + \zeta) = E[(\xi + \eta) + \zeta] = E(\xi + \eta)\,E(\zeta) = E(\xi)\,E(\eta)\,E(\zeta),$$

и т. д.,

а слѣд., $E(\xi+\eta+\zeta+\ldots.\lambda)=E(\xi)E(\eta)\ldots.E(\lambda)$,

откуда, полагая $\xi=\eta=\zeta=\ldots.=\lambda=1$

и считая, что число этихъ величинъ есть n, получаемъ:

$$E(n\xi)=[E(\xi)]^n.$$

Полагая здѣсь $\xi=1$ и $E(1)=a$,

гдѣ, очевидно, a — *нѣкоторое постоянное число*, получаемъ

$$E(n)=[E(1)]^n=a^n;$$

а полагая $\xi=\frac{1}{m}$, гдѣ m — цѣлое,

имѣемъ $$E\left(n\cdot\frac{1}{m}\right)=\left[E\left(\frac{1}{m}\right)\right]^n,$$

что при $n=m$ даетъ: $E(1)=\left[E\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m$,

откуда $$E\left(\frac{1}{m}\right)=a^{\frac{1}{m}},$$

а слѣд., $$E\left(\frac{n}{m}\right)=\left[E\left(\frac{1}{m}\right)\right]^n=(a^{\frac{1}{m}})^n=a^{\frac{n}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots(3).$$

Но ур-ніе $\xi=L(x)=\int_1^x\frac{du}{u}$ даетъ: $\xi'_x=L'_x(x)=\frac{1}{x}$

и, слѣд., $$E'_\xi(\xi)=x'_\xi=\frac{1}{\xi'_x}=x=E(\xi)\ldots\ldots\ldots(4),$$

откуда слѣдуетъ, что *функція* $E(\xi)$, *какъ имѣющая конечную производную, непрерывна*; а такъ какъ и функція a^ξ — непрерывна, то, подводя $\frac{n}{m}$ въ (3) къ предѣлу ξ, получаемъ:

$$\underline{E(\xi)=a^\xi};$$

такимъ образомъ $E(\xi)$ *есть ни что иное, какъ показательная функція* a^{ξ}; при этомъ всѣ ея свойства можно изучить, исходя все изъ того же ур-нія (1). Дѣйствительно, во-первыхъ, по самому условію всегда

$$E(\xi) > 0.$$

Во-вторыхъ, изъ (4) слѣдуетъ, что и $E'(\xi) > 0$, т.-е. $E(\xi)$ растетъ вмѣстѣ съ ξ; а такъ какъ при $x=1$ изъ (1) получаемъ, что

$$L(1) = \int_1^1 \frac{dx}{x} = 0,$$

то, слѣд., обратно $E(0) = 1.$

Въ третьихъ, изъ (4) вытекаетъ, что

$$E(\xi) = E'(\xi) = E''(\xi) = \ldots.$$

и, слѣд., $E(0) = E'(0) = E''(0) = \ldots. = 1,$

а потому по формулѣ Маклорена имѣемъ, что

$$E(\xi) = 1 + \frac{\xi}{1} + \frac{\xi^2}{1.2} + \frac{\xi^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots (5),$$

при чемъ обыкновеннымъ способомъ убѣдимся, что это разложеніе существуетъ при всякомъ ξ.

Наконецъ, такъ какъ $L'(1+x) = \frac{1}{1+x}$,

то по правилу L'Hospitale'я:

$$\text{Пред.}\left[\frac{L(1+x)}{x}\right] = \text{Пред.}\,[L'(1+x)]_{x\ldots.0} = 1,$$

а потому $\text{Пред.}\,\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}_{x\ldots.0} = \text{Пред.}\,\{[a^{L(1+x)}]^{\frac{1}{x}}\}_{x\ldots.0} =$

$$= \text{Пред.}\,\{a^{\frac{L(1+x)}{x}}\}_{x\ldots.0} = \text{Пред.}\left\{E\left[\frac{L(1+x)}{x}\right]\right\}_{x\ldots.0} = E(1),$$

т.-е. $E(1) = e$, гдѣ e — Неперово число, при чемъ изъ (5) выводимъ еще, что

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots .$$

3. II. Положимъ еще $At(x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$ . . . . . (6).

Тогда, во-первыхъ, очевидно $At(0) = 0$ . . . . . (7).

Во-вторыхъ, $At(x) = \int_0^x \frac{du}{1+u^2}$, $At(y) = \int_0^y \frac{dv}{1+v^2}$,

и, слѣд.,

$$At(x) + At(y) = \int_0^x \frac{du}{1+u^2} + \int_0^y \frac{dv}{1+v^2} = \int_{u=0,\,v=0}^{u=x,\,v=y} \left\{\frac{du}{1+u^2} + \frac{dv}{1+v^2}\right\} =$$

$$= \int_{u=0,\,v=0}^{u=x,\,v=y} \frac{(1+v^2)\,du + (1+u^2)\,dv}{(1+u^2)(1+v^2)} = \int_{u=0,\,v=0}^{u=x,\,v=y} \frac{(1-uv+uv+v^2)\,du + (1-uv+uv+u^2)\,dv}{1+u^2+v^2+u^2v^2-2uv+2uv} =$$

$$= \int_{u=0,\,v=0}^{u=x,\,v=y} \frac{(1-uv)(du+dv)+(u+v)(vdu+udv)}{(1-uv)^2+(u+v)^2} = \int_{u=0,\,v=0}^{u=x,\,v=y} \frac{(1-uv)\,d(u+v)+(u+v)\,d(uv)}{(1-uv)^2+(u+v)^2} =$$

$$= \int_{u=0,\,v=0}^{u=x,\,v=y} \frac{\frac{(1-uv)\,d(u+v)-(u+v)\,d(1-uv)}{(1-uv)^2}}{1+\left(\frac{u+v}{1-uv}\right)^2} = \int_{u=0,\,v=0}^{u=x,\,v=y} \frac{d\frac{u+v}{1-uv}}{1+\left(\frac{u+v}{1-uv}\right)^2},$$

т.-е. $$At(x) + At(y) = At\frac{x+y}{1-xy} \quad \ldots\ldots\ldots (8);$$

такимъ образомъ получили функціональное ур-ніе, опредѣляющее функцію $At(x)$.

Обозначая теперь черезъ T обратную функцію, такъ что если

$$At(x) = \xi, \text{ то } x = T(\xi),$$

и полагая $At(y) = \eta,\ At\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \zeta,$

откуда $y = T(\eta)$ и $\frac{x+y}{1-xy} = T(\zeta),$

получаемъ: $T(\zeta) = \frac{T(\xi)+T(\eta)}{1-T(\xi)\,T(\eta)};$

и такъ какъ (5) даетъ: $\zeta = \xi + \eta,$

то имѣемъ слѣдующую формулу сложенія функціи T:

$$\underline{T(\xi+\eta) = \frac{T(\xi)+T(\eta)}{1-T(\xi)\,T(\eta)}}.$$

Въ третьихъ, такъ какъ функція $At(x)$ имѣетъ конечную производную $\frac{1}{1+x^2}$, то она непрерывна; обратная функція $T(\xi)$ тоже имѣетъ производную, именно:

$$\underline{T'(\xi)} = x'_\xi = \frac{1}{\xi'_x} = \frac{1}{At'(x)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)} = 1+x^2 = \underline{1+T^2(\xi)},$$

а слѣд., и она непрерывна.

Наконецъ, такъ какъ всегда $T'(\xi) > 0$, то $T(\xi)$ растетъ вмѣстѣ съ ξ, откуда, на основаніи (7), выводимъ, что $T(0)=0$ и, слѣд., по правилу L'Hospitale'я:

$$\text{Пред.}\left[\frac{T(\xi)}{\xi}\right]_{\xi....0} = \text{Пред.}\,[T'(\xi)]_{\xi....0} = \text{Пред.}\,[1+T^2(\xi)]_{\xi....0} = 1,$$

и точно такъ же

$$\text{Пред.}\left[\frac{At(x)}{x}\right]_{x....0} = \text{Пред.}\,[At'(x)]_{x....\infty} = \text{Пред.}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)_{x....0} = 1.$$

4. Введемъ теперь еще двѣ новыхъ функціи $S(\xi)$ и $C(\xi)$, опредѣляемыхъ ур-ніями:

$$S(\xi)=\frac{T(\xi)}{\sqrt{1+T^2(\xi)}},\quad C(\xi)=\frac{1}{\sqrt{1+T^2(\xi)}},$$

при условіи брать корень съ плюсомъ, и двѣ обратныхъ имъ:

$$As(y)\ \text{и}\ Ac(z),$$

такъ что если $S(\xi)=y$ и $C(\xi)=z$, то $\xi=As(y)=Ac(z)$.

Тогда, во-первыхъ, $C(0)=1$, $S(0)=0$ и Пред. $\left[\frac{S(\xi)}{\xi}\right]_{\xi=0}=1$.

Во-вторыхъ, $\underline{S^2(\xi)+C^2(\xi)=1}$ и $\underline{T(\xi)=\frac{S(\xi)}{C(\xi)}}$.

Въ третьихъ,

$$S(\xi+\eta)=\frac{T(\xi+\eta)}{\sqrt{1+T^2(\xi+\eta)}}=\frac{\frac{T(\xi)+T(\eta)}{1-T(\xi)\,T(\eta)}}{\sqrt{1+\left[\frac{T(\xi)+T(\eta)}{1-T(\xi)\,T(\eta)}\right]^2}}=$$

$$=\frac{T(\xi)+T(\eta)}{\sqrt{[1-T(\xi)\,T(\eta)]^2+[T(\xi)+T(\eta)]^2}}=\frac{T(\xi)+T(\eta)}{\sqrt{1+T^2(\xi)+T^2(\eta)+T^2(\xi)\,T^2(\eta)}}=$$

$$=\frac{T(\xi)+T(\eta)}{\sqrt{[1+T^2(\xi)]\,[1+T^2(\eta)]}}=\frac{T(\xi)}{\sqrt{1+T^2(\xi)}}\frac{1}{\sqrt{1+T^2(\eta)}}+\frac{1}{\sqrt{1+T^2(\xi)}}\frac{T(\eta)}{\sqrt{1+T^2(\eta)}},$$

т.-е. $\underline{S(\xi+\eta)=S(\xi)\,C(\eta)+C(\xi)\,S(\eta)}$;

точно такъ же

$$C(\xi+\eta)=\frac{1}{\sqrt{1+T^2(\xi+\eta)}}=\frac{1-T(\xi)\,T(\eta)}{\sqrt{[1+T^2(\xi)]\,[1+T^2(\eta)]}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+T^2(\xi)}}\frac{1}{\sqrt{1+T^2(\eta)}}-\frac{T(\xi)}{\sqrt{1+T^2(\xi)}}\frac{T(\eta)}{\sqrt{1+T^2(\eta)}},$$

т.-е. $\underline{C(\xi+\eta)=C(\xi)\,C(\eta)-S(\xi)\,S(\eta)}$;

это — **формулы сложенія** *функцій* S и C.

Въ четвертыхъ, $\underline{T'(\xi)=\frac{1}{C^2(\xi)}}$

и $C'(\xi)=-\frac{T(\xi)\,T'(\xi)}{[1+T^2(\xi)]\sqrt{1+T^2(\xi)}}=-\frac{T(\xi)}{\sqrt{1+T^2(\xi)}}$, т.-е. $\underline{C'(\xi)=-S(\xi)}$,

а $S'(\xi) = [T(\xi)\,C(\xi)]'_\xi = C(\xi)\,T'(\xi) + T(\xi)\,C'(\xi) = \frac{1}{C(\xi)} - T(\xi)\,S(\xi) =$

$= \frac{1 - S^2(\xi)}{C(\xi)} = \frac{C^2(\xi)}{C(\xi)}$, т.-е. $\underline{S'(\xi) = C(\xi)}$,

откуда по формулѣ Маклорена еще получаемъ:

$$S(\xi) = \xi - \frac{\xi^3}{1.2.3} + \frac{\xi^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$C(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{1.2} + \frac{\xi^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

при чемъ убѣдимся, что ряды эти существуютъ при любомъ ξ.

Въ пятыхъ, $As'(y) = \xi'_y = \frac{1}{y'_\xi} = \frac{1}{S'(\xi)} = \frac{1}{C(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{1 - S^2(\xi)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

и $Ac'(z) = \xi'_z = \frac{1}{z'_\xi} = \frac{1}{C'(\xi)} = \frac{1}{-S(\xi)} = -\frac{1}{\sqrt{1-C^2(\xi)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$.

Наконецъ, если будемъ строить прямоугольные треугольники OAM, катеты коихъ суть $OA = C(\xi)$ и $AM = S(\xi)$, то гипотенуза OM все время будетъ равна 1 и, слѣд., опишетъ окружность центра O. Обозначимъ уголъ AOM черезъ φ; тогда съ одной стороны площадь Q соотвѣтствующаго сектора OCM круга равна, какъ извѣстно, $\frac{\varphi}{2}$; а съ другой — имѣемъ

$$Q = \int_0^\xi \frac{z\,dy - y\,dz}{2} = \frac{1}{2}\int_0^\xi [C(\xi)\,dS(\xi) - S(\xi)\,dC(\xi)] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\xi [C^2(\xi) + S^2(\xi)]\,d\xi = \frac{1}{2}\int_0^\xi d\xi = \frac{\xi}{2};$$

слѣд.,

$$\xi = \varphi,$$

т.-е. установили и геометрическій смыслъ величинъ $S(\xi)$ и $C(\xi)$.

Цѣна 2 р. 25 к.